

## I QUADRANTI SOLARI

L. CUGUSI

*Istituto di Astronomia dell'Università, Cagliari*

### 1. Introduzione

Il moto apparente del Sole nel cielo è di una evidenza così palpitante che esso attirò l'attenzione dell'uomo sin dai primordi della civiltà.

Alcuni lettori ignorano forse che, grazie alla luce del Sole, venivano fatti funzionare, sin da tempi remoti, alcuni semplici strumenti con i quali era possibile determinare approssimativamente l'ora del giorno; osservare alcuni fenomeni celesti di grande importanza come il verificarsi dei solstizi (l'anno olimpico e l'anno atenaico iniziavano nell'antica Grecia verso il solstizio d'estate) e degli equinozi; valutare l'obliquità dell'eclittica e la latitudine del luogo.

Il più semplice di questi strumenti, la cui invenzione si perde probabilmente nella notte dei tempi (anche se dallo storico Erodoto fu attribuita ai Babilonesi), e che tra l'altro è usato tutt'oggi in alcune tribù del Borneo rimaste in uno stadio primordiale di civiltà, consiste in un'asta verticale, chiamata gnomone, infissa nel suolo: un osservatore attento e paziente noterà che l'ombra gettata dallo gnomone, infinitamente lunga al sorgere del Sole, va a mano a mano accorciandosi mentre il Sole nel suo moto diurno apparente si alza nel cielo, sino a raggiungere la minima lunghezza in un istante del giorno, a cui si dà il nome di mezzogiorno solare vero, quando l'altezza del Sole sull'orizzonte è massima; da quell'istante in poi l'ombra riprende a crescere sino a ridiventare infinitamente lunga al tramonto del Sole.

Un semplice strumento di questo tipo permette innanzitutto di misurare il tempo attraverso la variazione di lunghezza dell'ombra dello gnomone (uso questo che fu comune nell'antico Egitto e successivamente nell'antica Grecia) o, in alternativa, attraverso la variazione della direzione dell'ombra; quindi di determinare

con facilità la direzione nord-sud osservando la direzione dell'ombra giunta alla sua minima lunghezza, fatto questo di estrema importanza per l'orientamento; di mettere in relazione la variazione, nel corso dell'anno, della massima altezza raggiunta dal Sole sull'orizzonte con il ciclo delle stagioni: si riesce infatti a stabilire, confrontando tra di loro di giorno in giorno le minime lunghezze dell'ombra dello gnomone, che la minima in assoluto tra di esse si ha mediamente sempre lo stesso giorno dell'anno, il 22 giugno, mentre la massima tra di esse si ha il 22 dicembre, epoche queste dell'anno da noi designate con il nome di solstizi e che per convenzione determinano rispettivamente l'inizio dell'estate e dell'inverno nel nostro emisfero; fornisce di conseguenza la possibilità di determinare la durata dell'anno come intervallo di tempo intercorrente tra due successivi solstizi d'estate.

Uno strumento di questo tipo, tanto rudimentale quanto valido, non fu certo il solo ad essere usato nei millenni passati: numerosi sono infatti gli esemplari trovati di orologi solari tracciati su superfici sferiche concave riproducenti invertita la volta celeste (i prototipi sono verosimilmente l'*Hemicyclum* e l'*Hemispherium* di Beroso, sacerdote-astronomo caldeo del IV secolo a.C.); su superfici coniche concave il cui asse è parallelo all'asse del mondo; infine su superfici piane orizzontali o verticali, come la splendida Torre dei Venti di Atene che nella sua forma ottagonale ospita ben 8 quadranti solari verticali.

Anche se probabilmente i primi ad usare lo gnomone e gli orologi solari, come pure a suddividere il giorno in 12 ore eguali, furono i Caldei, tuttavia i ritrovamenti più antichi si ebbero durante esplorazioni archeologiche effettuate in Egitto, e sono datati a partire dal 1500 a.C. circa, il così detto Periodo del Nuovo Regno (XVIII dinastia). È quasi certo che i Greci appresero la tecnica della costruzione dei quadranti solari dai Caldei, dai Fenici o dai sacerdoti egiziani; i Romani, dal canto loro, non fecero altro che seguire le tracce dei Greci (il primo quadrante solare che comparve a Roma era stato prelevato da Catania nel III secolo a.C.) e ad essi non si deve alcun perfezionamento. Resta il fatto che nel I secolo a.C. gli orologi solari ebbero una vastissima diffusione non solo a Roma ma in tutto l'impero romano, e restarono in auge per lungo tempo se è vero che un gran numero di esemplari ci è pervenuto dagli scavi di Pompei.

Importanti fonti storiche che testimoniano dell'uso dei quadranti solari sono la Sacra Scrittura, nella quale in due occasioni (Libro II dei Re 20:9-11, Isaia 38:8) è citato l'orologio solare di Akhaz, Re di Giudea nell'VIII secolo a.C.; le opere storiche di Erodoto (V secolo a.C.); il trattato *De Architectura* di Vitruvio (I secolo a.C.); la *Naturalis Historia* di Plinio il Vecchio (I secolo d.C.); le opere storiche di Plutarco (I-II secolo d.C.); infine il famoso trattato l'*Almagesto* di Tolomeo (II secolo d.C.).

Quanto detto vale per le civiltà che crebbero sulle sponde del Mediterraneo; è stato provato però, pur attraverso maggiori difficoltà, che anche i paesi dell'Estremo Oriente e l'India maturarono un loro interesse per questi strumenti astronomici.

Naturalmente con il passare dei secoli si andavano moltiplicando, grazie all'estro dei costruttori, le forme sotto le quali venivano realizzati i quadranti solari

e si andava estendendo il loro uso: ma per la gnomonica, come per tutte le discipline scientifiche, il Medio Evo (V-XIII secolo d.C.) segnò un periodo di stasi o addirittura di regressione (come avvenne per un altro strumento già allora vecchio di secoli, l'astrolabio), fatta eccezione per lo sviluppo della trigonometria dovuto alla Scuola Araba, che era destinata a dare maggior rigore al calcolo degli orologi solari.

Si giunge così al Rinascimento (XV-XVI secolo) con il rifiorire di tutte le scienze e arti: splendidi quadranti solari di quel periodo sono oggi conservati presso il Museo delle Scienze di Firenze, e portano i nomi di Gerolamo della Volpaia, di Stefano Bonsignori, di M.C. Schissler e di tanti altri che gravitarono attorno alla corte medicea.

Il XIX secolo, con il diffondersi dei pendoli, degli orologi da tasca e da polso, segna un po' il tramonto dell'utilità dei quadranti solari, che tuttavia non cadono in disuso, ma continuano ad essere oggetto di studio da parte di amatori ed astronomi. Al giorno d'oggi quei pochi che, corrosi dal tempo, abbelliscono le facciate delle chiese, i sagrati od i giardini del nostro Paese, sono diventati più che altro oggetto di curiosità, di tiepida attenzione come cose d'altri tempi.

Lo scopo del presente articolo, che non ha certo pretese di originalità, è quello di indirizzare verso la gnomonica l'interesse di chi è amante dell'astronomia e curioso di conoscere tutti i fenomeni che da essa vengono studiati, fornendogli gli strumenti essenziali per capire il funzionamento, calcolare e costruire di propria mano alcuni tipi fondamentali di quadranti solari, presentati in veste moderna.

## **2. Elementi di astronomia sferica**

Premettiamo alcuni elementi di astronomia fondamentale, a cui in genere si fa cenno nelle scuole secondarie nello studio della così detta Geografia Astronomica.

Le fig. 1, 2, 3, 4 sono rappresentazioni schematiche della sfera celeste e dei suoi elementi fondamentali che permettono di introdurre dei sistemi di riferimento rispetto ai quali si suole descrivere il moto dei corpi celesti, in particolare del Sole.

Nella fig. 1, sulla sfera celeste, vista da un osservatore « esterno » ad essa, sono rappresentati:

- la verticale del luogo di osservazione  $O$  (che è un punto qualunque della superficie terrestre) che interseca la sfera celeste nei punti zenit  $Z$  e nadir  $Z'$ ;
- il piano passante per  $O$  e perpendicolare alla verticale che interseca la sfera celeste secondo una circonferenza chiamata orizzonte celeste; per un osservatore posto in  $O$  è visibile solo la semisfera contenente lo zenit;
- l'asse del mondo, o asse polare, cioè l'asse attorno al quale avviene la rotazione della Terra in senso antiorario e quindi la rotazione apparente della sfera celeste in senso orario; esso interseca la sfera celeste in due punti: il polo nord celeste  $P_n$  ed il polo sud celeste  $P_s$ , e forma con il piano dell'orizzonte un angolo  $\varphi$  pari alla latitudine del luogo;

- il piano meridiano (coincidente con il piano del disegno), cioè il piano passante per la verticale  $ZZ'$  e per il polo nord: i due punti in cui esso interseca l'orizzonte celeste sono i punti cardinali nord e sud;
- il piano passante per la verticale  $ZZ'$  e perpendicolare al meridiano, chiamato primo verticale: esso interseca l'orizzonte celeste nei punti cardinali est ed ovest.

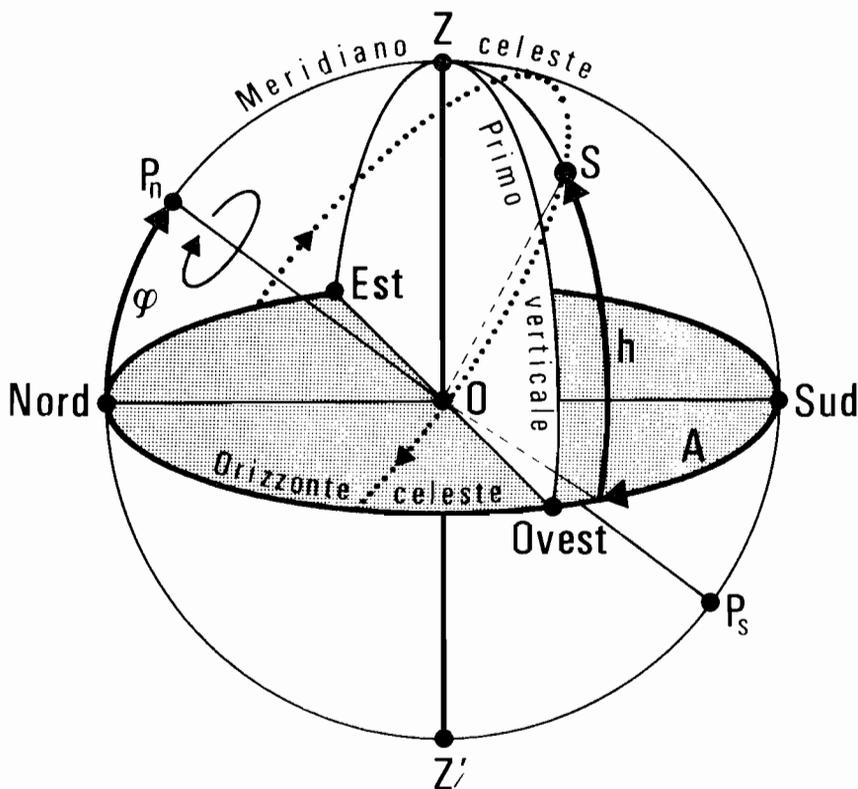


FIG. 1  
La sfera celeste ed il sistema di riferimento orizzontale.

I primi due elementi introdotti, cioè la direzione della verticale e il piano dell'orizzonte, definiscono il sistema di riferimento orizzontale rispetto al quale la posizione di un oggetto celeste  $S$  è individuabile tramite due coordinate angolari, l'altezza  $h$ , cioè l'angolo che il raggio  $OS$  forma con il piano orizzontale, e l'azimut  $A$ , cioè l'angolo diedro che il piano passante per la verticale e per l'oggetto forma con il piano meridiano. L'altezza, positiva per un oggetto al di sopra dell'orizzonte, negativa per un oggetto al di sotto dell'orizzonte, varia a  $0^\circ$  (oggetto sull'orizzonte)

a  $90^\circ$  (oggetto coincidente con lo zenit). L'azimut è sempre positivo, varia da  $0^\circ$  a  $360^\circ$  ed è contato dal punto cardinale sud in senso orario, dunque verso ovest; se ne deduce facilmente che i punti cardinali hanno tutti altezza  $0^\circ$  e azimut: sud  $0^\circ$ , ovest  $90^\circ$ , nord  $180^\circ$ , est  $270^\circ$ .

Rispetto a questo sistema di riferimento che deve essere pensato fisso rispetto all'osservatore O, il moto apparente di una stella, originato dalla rotazione apparente della volta celeste, può essere così descritto brevemente:

- la stella sorge sempre nello stesso punto dell'orizzonte, con azimut compreso tra  $180^\circ$  e  $360^\circ$ ;
- descrive un arco ascendente che la porta a raggiungere la sua massima altezza sull'orizzonte, ossia a culminare superiormente, quando attraversa il meridiano del luogo di osservazione;
- quindi, dopo aver descritto un arco discendente perfettamente simmetrico rispetto a quello ascendente, tramonta sempre nello stesso punto dell'orizzonte con azimut compreso tra  $0^\circ$  e  $180^\circ$ .

Un discorso a parte meritano le stelle circumpolari, che distano cioè dal polo nord celeste di un angolo minore della latitudine del luogo, in quanto restano sempre al di sopra dell'orizzonte. In ogni caso, rispetto a questo sistema di riferimento variano istante per istante entrambe le coordinate dell'oggetto.

Il Sole è invece un corpo celeste dotato di moto apparente rispetto alla sfera delle stelle fisse, come verrà descritto più dettagliatamente in seguito. Questo fatto fa sì che i punti dell'orizzonte in cui esso sorge e tramonta e la massima altezza sull'orizzonte da esso raggiunta varino di giorno in giorno nel corso dell'anno (fig. 2). In particolare il Sole sorge ad est e tramonta ad ovest solo agli equinozi di primavera e d'autunno, quando il suo arco diurno è uguale all'arco notturno: dopo l'equinozio di primavera infatti i punti del sorgere e del tramontare si spostano progressivamente verso nord rispetto alla retta est-ovest sino a raggiungere la massima distanza, dell'ordine di  $30^\circ$  alle nostre latitudini, al solstizio d'estate, quando massima è pure la lunghezza dell'arco diurno; quindi si riavvicinano ai punti cardinali est-ovest che raggiungono all'equinozio di autunno per poi spostarsi progressivamente verso sud sino alla distanza massima di circa  $30^\circ$  raggiunta al solstizio d'inverno, quando minima è la lunghezza dell'arco diurno; infine invertono di nuovo il loro moto che li porterà a coincidere nuovamente con i punti est-ovest al successivo equinozio di primavera.

Nella fig. 3 è introdotto un altro piano fondamentale cioè l'equatore celeste, perpendicolare alla direzione  $P_nP_s$ , precedentemente introdotta. Non altrimenti dallo schema precedentemente seguito, la direzione  $P_nP_s$  ed il piano equatoriale permettono di introdurre un secondo sistema di riferimento, nel quale le coordinate sono la declinazione  $\delta$ , definita come l'angolo che il raggio OS forma con il piano dell'equatore, e l'angolo orario H, cioè l'angolo diedro che il piano passante per l'asse del mondo e per l'oggetto S forma con il meridiano. Questo sistema di riferimento prende il nome di sistema di riferimento orario. In esso la declinazione è

contata positivamente dall'equatore ( $0^\circ$ ) verso il polo nord celeste ( $90^\circ$ ); negativamente verso il polo sud celeste ( $-90^\circ$ ); l'angolo orario è contato a partire dal meridiano in senso orario da  $0^\circ$  a  $360^\circ$  o meglio, in accordo con il suo nome, da 0 a 24 ore.

Rispetto a questo secondo sistema di riferimento, anch'esso, come il precedente, fisso rispetto all'osservatore O, il moto apparente di un oggetto celeste solido con la sfera delle stelle fisse può essere descritto con maggior semplicità, in quanto l'oggetto, trascinato dal moto di rotazione della sfera celeste attorno all'asse  $P_nP_s$ , descrive semplicemente un cerchio parallelo all'equatore celeste: la sua declinazione non varia dunque con il trascorrere del tempo, ma varia solo l'angolo orario.

Il moto apparente del Sole è invece più complesso: il Sole infatti, per effetto del moto di rivoluzione della Terra attorno ad esso, appare dotato, rispetto a un

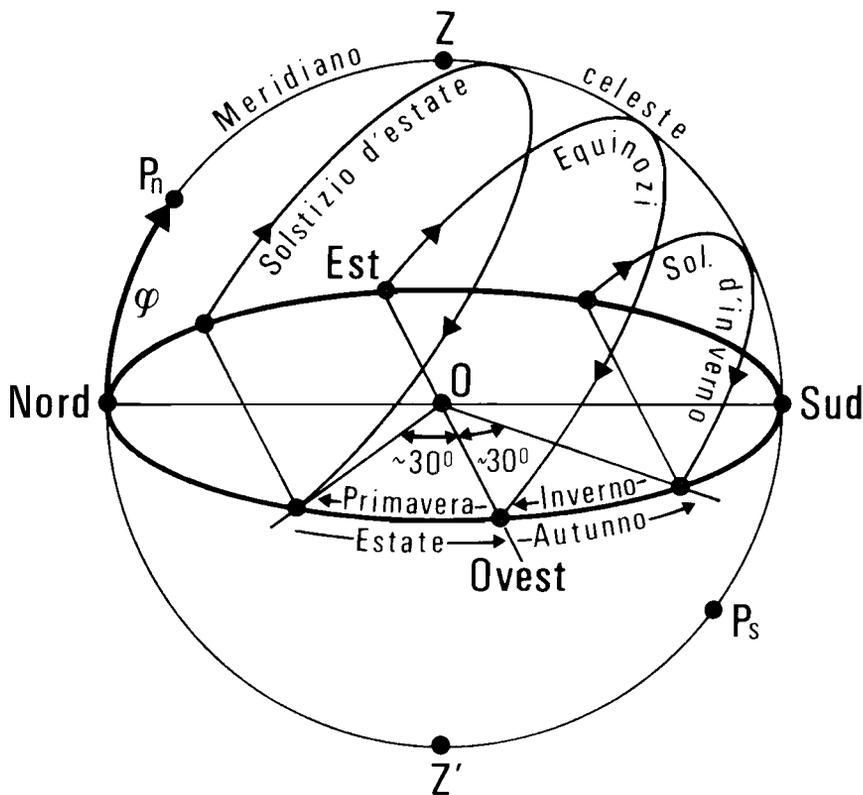


FIG. 2

Moto apparente del Sole e susseguirsi delle stagioni alla latitudine  $\varphi = 40^\circ$ .

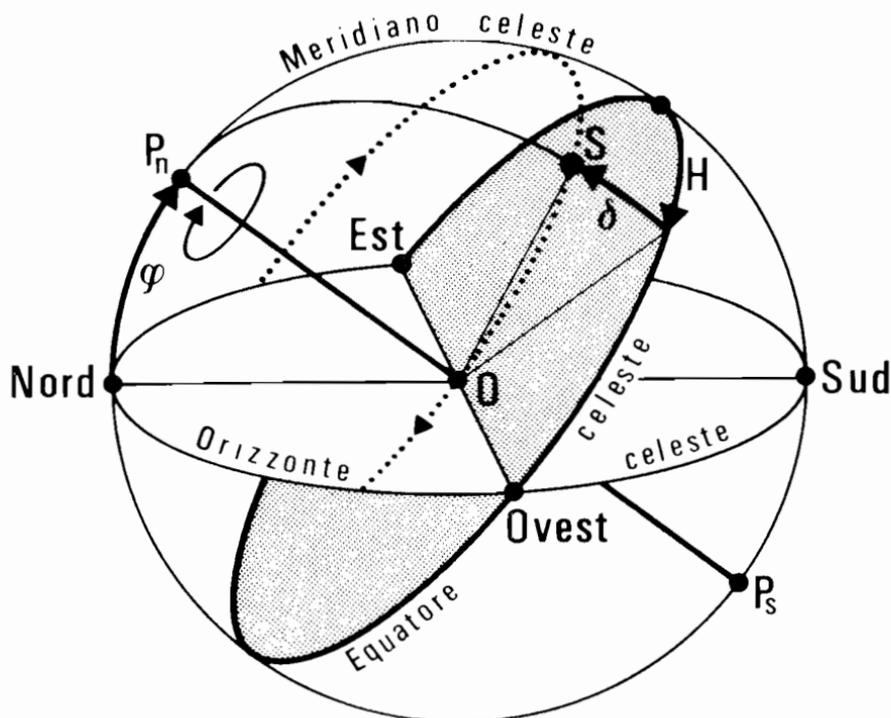


FIG. 3  
La sfera celeste ed il sistema di riferimento orario.

osservatore terrestre, di un moto apparente rispetto alla sfera celeste, sulla quale sembra descrivere nel corso di un anno un cerchio chiamato eclittica, il cui piano è inclinato di circa  $23^{\circ} 27'$  (obliquità dell'eclittica) rispetto al piano dell'equatore celeste (fig. 4). Questo moto, molto più lento di quello diurno, si traduce in una variazione lenta ma costante della declinazione che oscilla tra i valori  $+23^{\circ} 27'$  e  $-23^{\circ} 27'$  nel corso di un anno; tale variazione, sovrapponendosi al moto di rotazione della sfera celeste, porta il Sole a descrivere una sorta di spirale sulla volta celeste, dal tropico del Cancro (cerchio della sfera celeste distante dall'equatore  $+23^{\circ} 27'$  descritto dal Sole al solstizio d'estate) al tropico del Capricorno (cerchio della sfera celeste distante dall'equatore  $-23^{\circ} 27'$  descritto dal Sole al solstizio d'inverno) e viceversa nel corso di un anno.

### 3. Il quadrante solare equatoriale o equinoziale

Fatte queste premesse, appare chiaro che le variazioni in direzione e lunghezza dell'ombra proiettata dallo gnomone sono originate dalle variazioni dei valori della

coppia di coordinate solari declinazione-angolo orario (o altezza-azimut): deve essere quindi possibile stabilire delle relazioni matematiche tra le prime e le seconde.

Il quadrante solare nel quale queste relazioni possono più facilmente essere trovate è il quadrante equatoriale, il cui gnomone è diretto esattamente secondo il polo nord celeste (e pertanto forma un angolo pari alla latitudine  $\varphi$  con il piano dell'orizzonte) ed il cui piano è parallelo all'equatore (e quindi forma un angolo  $90^\circ - \varphi$  con il piano dell'orizzonte), come è chiaramente visibile in fig. 5. Il quadrante equatoriale va dunque a sovrapporsi al sistema di riferimento orario: è questa in ultima analisi la ragione per cui l'angolo orario descritto dall'ombra dello gnomone sul quadrante cresce con la stessa legge con cui cresce l'angolo orario del Sole e dunque uniformemente in prima approssimazione, cioè entro i limiti in cui uniforme può essere considerato il moto del Sole (si veda in proposito il § 6). Il tracciamento delle linee orarie, cioè dei segmenti rettilinei sui quali va a cadere

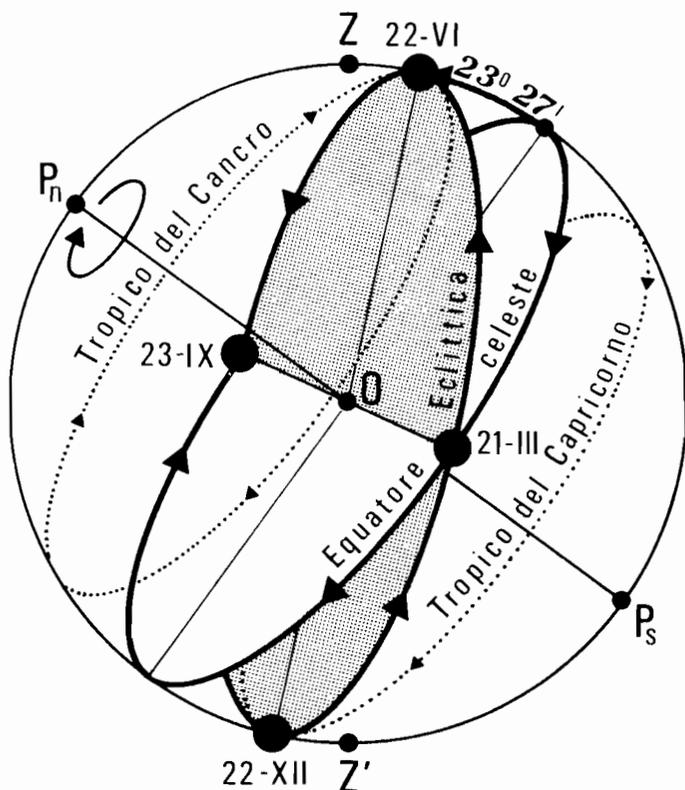


FIG. 4

Moto annuo apparente del Sole sull'eclittica e moto diurno.

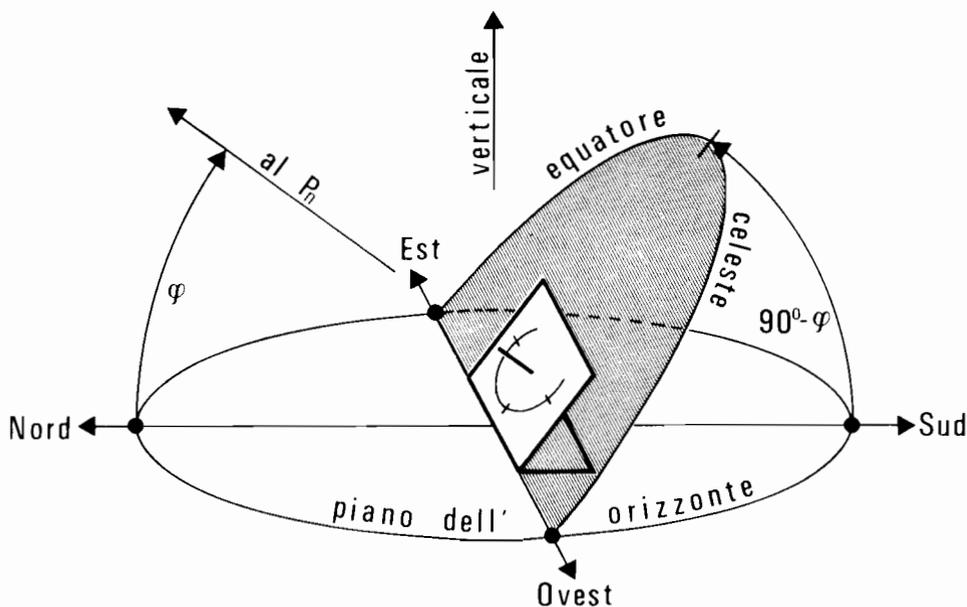


FIG. 5  
Collocazione del quadrante solare equatoriale.

L'ombra dello gnomone di ora in ora, è pertanto ricondotto ad una semplice divisione in 24 parti uguali di una circonferenza di diametro arbitrario, secondo la nota corrispondenza  $360^\circ = 24^h$ ,  $15^\circ = 1^h$ , esattamente come in fig. 6.

Si noti che, per convenzione, l'ora solare è definita come l'angolo orario del Sole incrementato di dodici ore, di modo che quando il Sole è in meridiano ed il suo angolo orario vale  $0^h$ , l'ombra dello gnomone va a cadere sulla linea contrassegnata con il numero XII, chiamata linea meridiana per evidenti motivi. La linea delle VI ore è invece l'intersezione del piano del quadrante con il primo verticale. Si osservi inoltre che la scala oraria è interrotta in fig. 6 alle ore IV del mattino e alle ore VIII di sera: in effetti alle nostre latitudini non si dà mai il caso che il Sole sorga o tramonti al di fuori della fascia suddetta. Per l'esattezza si potrebbe dimostrare che l'angolo orario  $H$  del sorgere e del tramontare del Sole in un giorno dell'anno in cui il Sole ha declinazione  $\delta$ , in un luogo di latitudine  $\varphi$ , è dato dalla relazione:

$$\cos H = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi \quad (1)$$

Nella tabella 1 sono riportati, per alcune città, gli istanti del sorgere e del tramontare del Sole ottenuti risolvendo l'equazione goniometrica (1) in corrispondenza dei solstizi e degli equinozi: scorrendo la tabella verticalmente si osserva una varia-

TABELLA 1 - Istanti del sorgere e del tramontare del Sole ai solstizi ed agli equinozi per alcune località.

		$\delta=+23;5$ Solstizio d'estate	$\delta=0^\circ$ Equinozi	$\delta=-23;5$ Solstizio d'inverno
Località	Latitudine	Sorgere Tramontare	Sorgere Tramontare	Sorgere Tramontare
Milano	+45°27'59"	4 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup> 19 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup>	6 <sup>h</sup> 00 <sup>m</sup> 18 <sup>h</sup> 00 <sup>m</sup>	7 <sup>h</sup> 45 <sup>m</sup> 16 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup>
Roma	+41°55'25"	4 28 19 32	6 00 18 00	7 32 16 28
Cagliari	+39°13'15"	4 37 19 23	6 00 18 00	7 23 16 37
Catania	+37°30'13"	4 42 19 18	6 00 18 00	7 18 16 42

zione di questi istanti in funzione della latitudine, variazione dell'entità massima di circa 30<sup>m</sup> ai solstizi (passando dall'estremo nord all'estremo sud della nostra penisola) e che si annulla solamente agli equinozi; scorrendo invece la tabella per linee orizzontali si osserva una variazione molto più ampia, dell'ordine di 3<sup>h</sup> alle nostre latitudini (ed è facile verificare che si annulla per una qualunque località sita sull'equatore), dipendente dalla declinazione del Sole, cioè dall'alternarsi delle stagioni. Va precisato che i valori calcolati del sorgere e tramontare sono espressi in tempo solare vero, ben differente dal tempo civile, come si preciserà nel § 6, e non sono corretti per alcuni importanti fenomeni, come per esempio la rifrazione atmosferica che causa un lieve aumento della durata del giorno.

La circonferenza base da tracciare sul quadrante può avere un diametro qualunque, adeguato alle dimensioni del piano di cui si dispone (50 x 50 cm per il quadrante riprodotto nella Tavola I): l'altezza dello gnomone potrà essere calcolata in modo tale che, al solstizio d'estate, l'estremità dell'ombra, che ha raggiunto allora la minima lunghezza, descriva esattamente la circonferenza tracciata. Il calcolo è elementare in quanto che, come si vede dalla figura 7a, se si designa con  $\ell$  la lunghezza dello gnomone, e con  $d$  la lunghezza dell'ombra si ha:

$$d = \ell \cotg\delta \quad (2)$$

Ne consegue che al solstizio d'estate la lunghezza dell'ombra dello gnomone è 2,31 volte quella dello gnomone stesso. Che poi l'estremità dell'ombra dello gnomone descriva ogni giorno un arco di circonferenza quasi perfetta è facilmente intuibile se si osservano le fig. 7a e 7b: infatti, supposto che nell'intervallo di un giorno la declinazione del Sole non vari in modo sensibile, il Sole descrive per effetto della rotazione della sfera celeste attorno all'asse polare una circonferenza parallela all'equatore celeste e di conseguenza l'ombra dello gnomone descrive un cono (d'ombra) rotondo che ha per asse l'asse polare. Intersecando questo cono con il piano del quadrante, perpendicolare all'asse del cono stesso, si ottiene evi-

dentemente un cerchio. Vedremo in seguito che quello appena descritto è un modo molto particolare di intersecare il cono d'ombra generato dallo gnomone. Le curve ottenute in questo modo sono chiamate linee di declinazione del quadrante, essendo in relazione diretta con la declinazione del Sole secondo l'equazione (2): è anche possibile tracciarne più di una, normalmente in corrispondenza di quei particolari valori della declinazione del Sole corrispondenti agli istanti in cui esso entra nei segni zodiacali, come è descritto dettagliatamente nel paragrafo seguente.

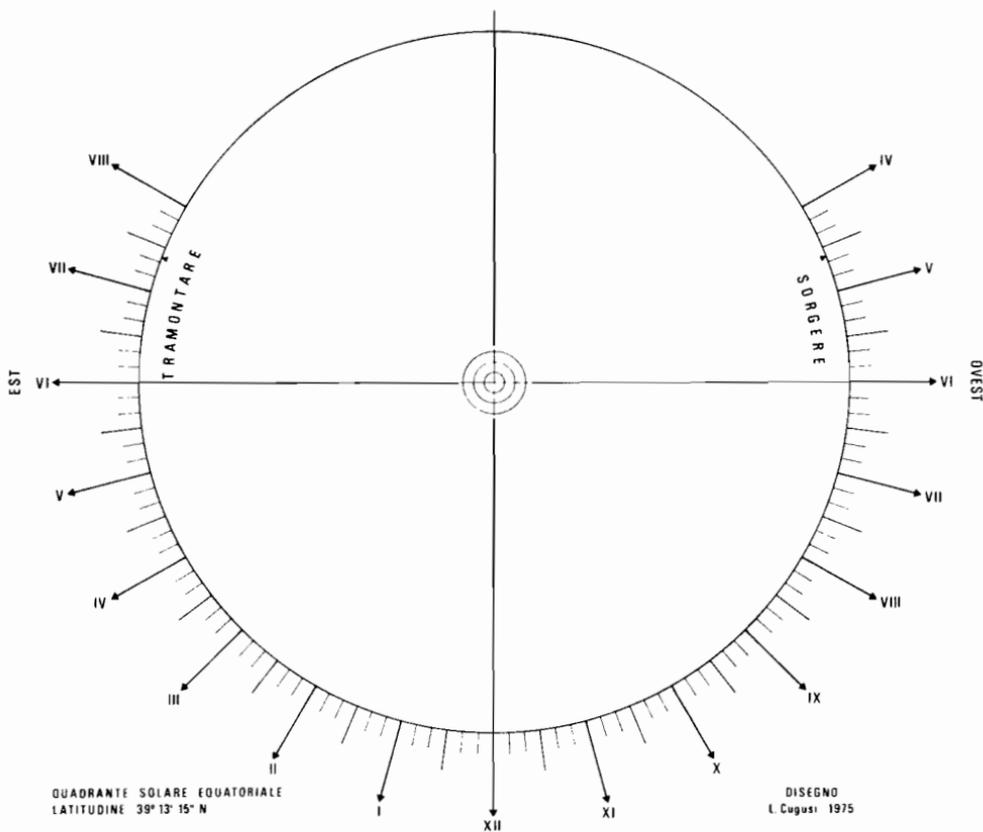


FIG. 6

Linee orarie e linee di declinazione del quadrante solare equatoriale.

Un'ultima precisazione circa il nome di equinoziale dato a volte al quadrante equatoriale. All'approssimarsi dell'equinozio di autunno il Sole si avvicina sempre più all'equatore celeste e l'ombra dello gnomone, in accordo con l'equazione (2), tende a diventare infinitamente lunga. Pertanto il giorno dell'equinozio il quadrante non è in grado di funzionare; non solo, ma, passato l'equinozio di autunno, la declinazione del Sole assume valori negativi: il Sole dunque sta *al di sotto* del piano

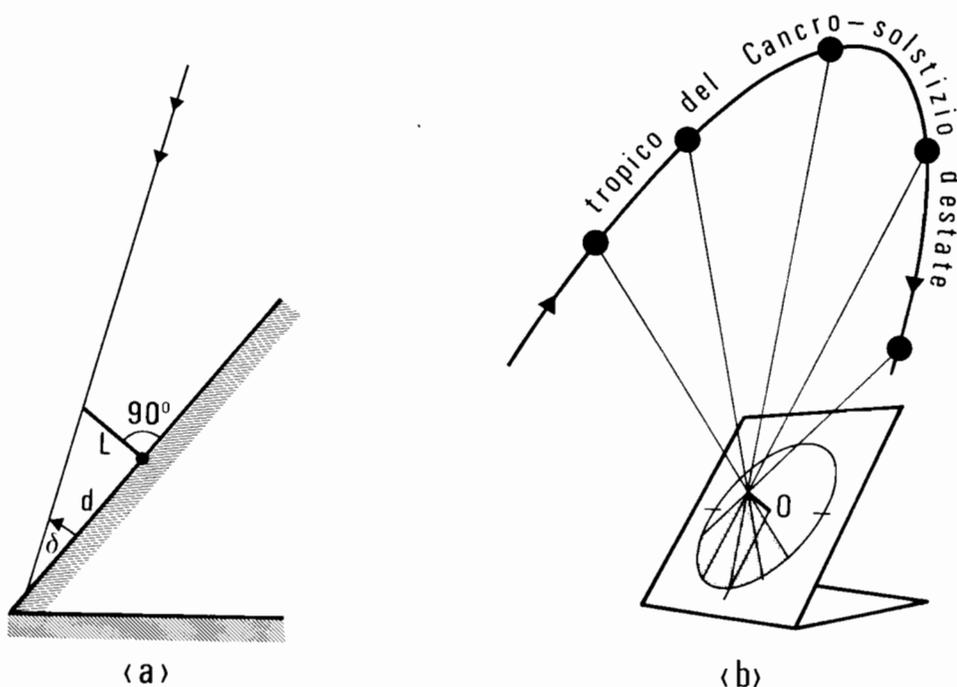


FIG. 7

Schematizzazione del cono d'ombra e delle linee di declinazione del quadrante solare equatoriale.

dell'equatore e quindi del piano del quadrante, che pertanto non può funzionare in questo periodo, a meno che non si ricorra all'espedito di tracciare le linee orarie e le linee di declinazione anche sulla faccia inferiore del piano del quadrante, che dovrà, in quest'ultimo caso, essere attraversato da parte a parte dallo gnomone.

#### 4. Quadranti solari orizzontale e verticale non declinante

Alcuni lettori forse avranno avuto modo di osservare un quadrante solare tracciato sulla facciata di una casa o di una chiesa, oppure in un giardino.

Che relazione c'è tra il quadrante equatoriale precedentemente descritto e i quadranti orizzontali e verticali?

La fig. 8 permette di rispondere in modo esauriente alla domanda. In essa sono riportati i tre piani fondamentali: equatoriale, orizzontale e verticale, quest'ultimo diretto secondo i punti cardinali est-ovest e quindi parallelo al primo verticale. Lo gnomone, diretto sempre secondo l'asse polare, è perpendicolare al piano equatoriale, forma con il piano orizzontale un angolo pari alla latitudine  $\varphi$  del luogo, con il piano verticale un angolo pari a  $90^\circ - \varphi$  (si vedano anche le fig. 11

e 12). Quando il Sole è in meridiano, l'ombra dello gnomone è rappresentata sui tre quadranti equatoriale, orizzontale e verticale (quest'ultimo chiamato non declinante perché parallelo al primo verticale) dai segmenti OA, O'A e O''A rispettivamente, essendo O, O' e O'' i punti radianti, dai quali si dipartono cioè le linee orarie: tali segmenti rappresentano pertanto le linee meridiane. Supponiamo ora che il Sole abbia oltrepassato da un certo tempo il meridiano e sia H il suo angolo orario: l'ombra dello gnomone è ora rappresentata sui tre quadranti dai segmenti OB, O'B e O''B ed evidentemente, per quanto detto precedentemente sul quadrante equatoriale, l'angolo AOB ha ampiezza uguale ad H. Si tratta di valutare l'ampiezza degli angoli AO'B e AO''B che indicheremo con H' e H'', intersezioni dell'angolo diedro H con i piani orizzontale e verticale rispettivamente. È im-

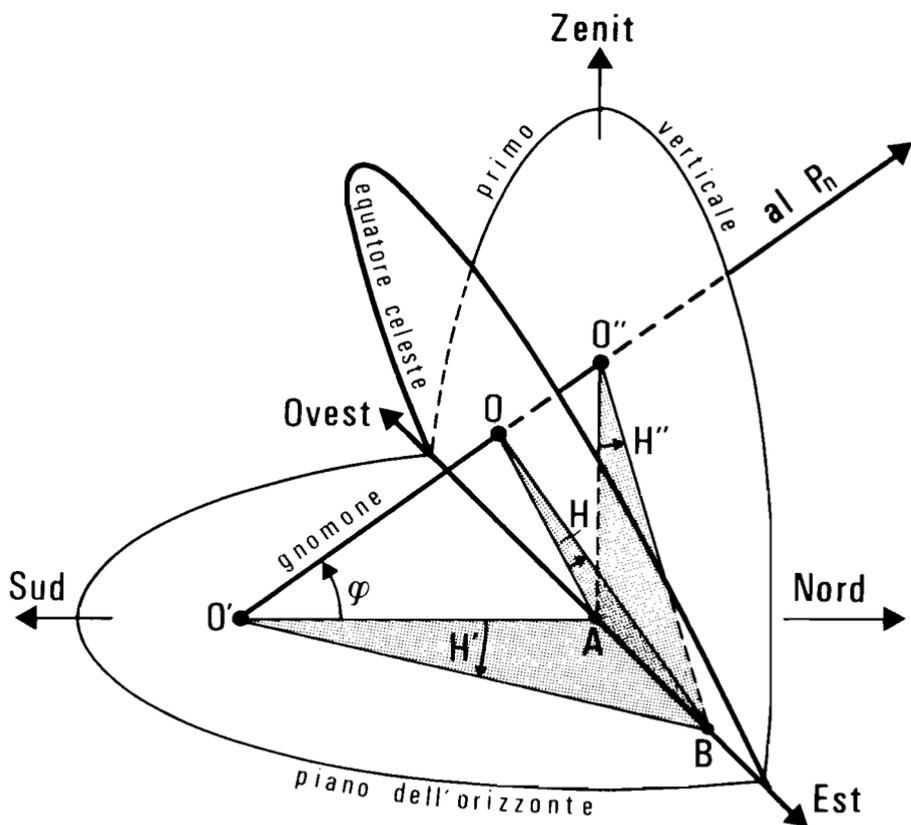


FIG. 8

Dal quadrante solare equatoriale ai quadranti solari orizzontale e verticale non declinante.

diato verificare che dai triangoli OAB, O'AB e O''AB, tutti rettangoli in A e aventi il lato AB in comune, si ha:

$$AB = OA \operatorname{tg}H \quad (3)$$

$$AB' = O'A \operatorname{tg}H' \quad (3')$$

$$AB = O''A \operatorname{tg}H'' \quad (3'')$$

e dividendo membro a membro:

$$\operatorname{tg}H' = \frac{OA}{O'A} \operatorname{tg}H \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}H'' = \frac{OA}{O''A} \operatorname{tg}H \quad (4')$$

D'altra parte dai due triangoli AOO' e AOO'', entrambi rettangoli in O, si ha:

$$\frac{OA}{O'A} = \sin\varphi \quad (5)$$

$$\frac{OA}{O''A} = \cos\varphi \quad (5')$$

così che in definitiva possiamo scrivere le relazioni cercate tra H, H' e H'':

$$\operatorname{tg}H' = \sin\varphi \operatorname{tg}H \quad (6) \quad H' = \operatorname{arctg}(\sin\varphi \operatorname{tg}H) \quad (6a)$$

$$\operatorname{tg}H'' = \cos\varphi \operatorname{tg}H \quad (6') \quad H'' = \operatorname{arctg}(\cos\varphi \operatorname{tg}H) \quad (6'a)$$

Si faccia riferimento ai seguenti due sistemi di assi cartesiani ortogonali: O'XY per il quadrante orizzontale, l'origine O' coincidente con il punto radiante, l'asse delle x diretto da est verso ovest, l'asse delle y diretto da nord verso sud; O''XY per il quadrante verticale, l'origine O'' coincidente con il punto radiante, l'asse delle x diretto da est verso ovest, l'asse delle y diretto verso lo zenit. Allora le equazioni (6) e (6') possono essere riscritte nella seguente forma:

$$x = y \sin\varphi \operatorname{tg}H \quad (6b)$$

$$x = y \cos\varphi \operatorname{tg}H \quad (6'b)$$

Le (6b) e (6'b) prendono il nome di equazioni delle rette orarie per i due quadranti orizzontale e verticale nell'ordine.

Nelle tabelle 2 e 3, per le stesse località che figurano nella tabella 1, sono riportati in funzione di H i valori di  $\operatorname{tg}H'$ , H' e  $\operatorname{tg}H''$ , H'' rispettivamente, calcolati di  $10^m$  in  $10^m$  dal valore  $H=0^h$  al valore  $H=6^h$ : data la periodicità della funzione tangente, è immediato ricavare i valori di H' e H'' per ogni altro valore di H: in base ad essi è pertanto immediato tracciare le linee orarie, come si preciserà nel § 7. Sempre dalle tabelle è facile accorgersi che, al crescere uniformemente di H,

TABELLA 2 - Quadrante solare orizzontale: parametri delle rette orarie in funzione dell'angolo orario del Sole.

		MILANO		ROMA		CAGLIARI		CATANIA		
H		t <sub>g</sub> H'	H'							
0 <sup>h</sup>	0 <sup>m</sup>	0	0°	0	0°	0	0°	0	0°	
10	2.5	0.0311	1.7827	0.0292	1.6709	0.0276	1.5814	0.0266	1.5226	
20	5	0.0624	3.5686	0.0585	3.3454	0.0553	3.1664	0.0533	3.0489	
30	7.5	0.0938	5.3613	0.0880	5.0269	0.0832	4.7586	0.0802	4.5825	
40	10	0.1257	7.1641	0.1178	6.7191	0.1115	6.3618	0.1073	6.1272	
50	12.5	0.1580	8.9803	0.1481	8.4256	0.1402	7.9797	0.1350	7.6868	
1	0	15	0.1910	10.8135	0.1790	10.1500	0.1694	9.6161	0.1631	9.2651
	10	17.5	0.2248	12.6671	0.2107	11.8962	0.1994	11.2750	0.1920	10.8662
	20	20	0.2595	14.5448	0.2432	13.6680	0.2301	12.9605	0.2216	12.4942
	30	22.5	0.2953	16.4502	0.2768	15.4696	0.2619	14.6768	0.2522	14.1536
	40	25	0.3324	18.3869	0.3116	17.3049	0.2949	16.4282	0.2839	15.8489
	50	27.5	0.3711	20.3589	0.3478	19.1783	0.3292	18.2195	0.3169	17.5848
2	0	30	0.4116	22.3700	0.3858	21.0941	0.3651	20.0554	0.3515	19.3664
	10	32.5	0.4514	24.4242	0.4257	23.0571	0.4028	21.9409	0.3879	21.1991
	20	35	0.4991	26.5254	0.4678	25.0719	0.4427	23.8813	0.4263	23.0883
	30	37.5	0.5470	28.6778	0.5127	27.1434	0.4852	25.8822	0.4672	25.0400
	40	40	0.5981	30.8855	0.5606	29.2765	0.5306	27.9492	0.5109	27.0604
	50	42.5	0.6532	33.1524	0.6122	31.4765	0.5794	30.0883	0.5579	29.1560
3	0	45	0.7128	35.4828	0.6681	33.7484	0.6323	32.3056	0.6088	31.3335
	10	47.5	0.7779	37.8803	0.7291	36.0975	0.6900	34.6075	0.6644	33.6001
	20	50	0.8495	40.3489	0.7963	38.5288	0.7536	37.0002	0.7256	35.9629
	30	52.5	0.9290	42.8918	0.8707	41.0473	0.8240	39.4900	0.7934	38.4291
	40	55	1.0180	45.5122	0.9542	43.6575	0.9030	42.0831	0.8695	41.0061
	50	57.5	1.1189	48.2126	1.0488	46.3636	0.9925	44.7852	0.9556	43.7007
4	0	60	1.2347	50.9949	1.1573	49.1692	1.0952	47.6014	1.0545	46.5193
	10	62.5	1.3694	53.8604	1.2835	52.0768	1.2147	50.5362	1.1695	49.4677
	20	65	1.5287	56.8091	1.4328	55.0880	1.3560	53.5925	1.3056	52.5504
	30	67.5	1.7209	59.8402	1.6130	58.2031	1.5265	56.7720	1.4698	55.7700
	40	70	1.9585	62.9515	1.8357	61.4206	1.7373	60.0745	1.6727	59.1274
	50	72.5	2.2608	66.1395	2.1191	64.7371	2.0054	63.4971	1.9309	62.6207
5	0	75	2.6604	69.3993	2.4935	68.1473	2.3598	67.0346	2.2721	66.2448
	10	77.5	3.2154	72.7242	3.0138	71.6437	2.8522	70.6788	2.7462	69.9912
	20	80	4.0427	76.1063	3.7892	75.2163	3.5860	74.4183	3.4527	73.8477
	30	82.5	5.4146	79.5361	5.0750	78.8530	4.8029	78.2386	4.6244	77.7979
	40	85	8.1478	83.0029	7.6369	82.5399	7.2273	82.1224	6.9587	81.8223
	50	87.5	16.3267	86.4950	15.3029	86.2612	14.4823	86.0500	13.9441	85.8981
6	0	90		90.0000		90.0000		90.0000		90.0000

H' e H'' non crescono uniformemente: questo fatto è particolarmente evidente poi nelle fig. 9 e 10, nelle quali si può osservare molto chiaramente l'addensarsi delle linee orarie in prossimità del mezzogiorno e la loro massima spaziatura in prossi-

TABELLA 3 - Quadrante solare verticale: parametri delle rette orarie in funzione dell'angolo orario del Sole.

H		MILANO		ROMA		CAGLIARI		CATANIA	
		t <sub>g</sub> H"	H"						
0 <sup>h</sup>	0 <sup>m</sup>	0	0°	0	0°	0	0°	0	0°
10	2.5	0.0306	1.7539	0.0325	1.8606	0.0338	1.9373	0.0346	1.9838
20	5	0.0614	3.5112	0.0651	3.7244	0.0678	3.8775	0.0694	3.9703
30	7.5	0.0923	5.2752	0.0980	5.5945	0.1020	5.8236	0.1044	5.9625
40	10	0.1237	7.0496	0.1312	7.4742	0.1366	7.7786	0.1399	7.9630
50	12.5	0.1555	8.8376	0.1649	9.3665	0.1718	9.7455	0.1759	9.9748
1	0	0.1879	10.6429	0.1994	11.2749	0.2076	11.7271	0.2125	12.0006
10	17.5	0.2211	12.4690	0.2346	13.2025	0.2443	13.7267	0.2501	14.0433
20	20	0.2553	14.3197	0.2708	15.1527	0.2820	15.7470	0.2887	16.1057
30	22.5	0.2905	16.1985	0.3082	17.1288	0.3209	17.7913	0.3286	18.1906
40	25	0.3270	18.1095	0.3469	19.1342	0.3613	19.8625	0.3699	20.3009
50	27.5	0.3651	20.0565	0.3873	21.1724	0.4033	21.9638	0.4130	22.4393
2	0	0.4049	22.0436	0.4296	23.2469	0.4473	24.0981	0.4580	24.6088
10	32.5	0.4468	24.0748	0.4740	25.3611	0.4935	26.2685	0.5054	26.8119
20	35	0.4911	26.1545	0.5210	27.5186	0.5425	28.4781	0.5555	29.0515
30	37.5	0.5381	28.2868	0.5709	29.7229	0.5945	30.7298	0.6087	31.3302
40	40	0.5885	30.4761	0.6243	31.9774	0.6501	33.0264	0.6657	33.6505
50	42.5	0.6426	32.7268	0.6818	34.2855	0.7099	35.3708	0.7269	36.0149
3	0	0.7013	35.0430	0.7440	36.6506	0.7747	37.7655	0.7933	38.4255
10	47.5	0.7654	37.4292	0.8120	39.0757	0.8455	40.2129	0.8658	40.8844
20	50	0.8358	39.8892	0.8867	41.5637	0.9233	42.7153	0.9454	43.3934
30	52.5	0.9140	42.4269	0.9696	44.1171	1.0096	45.2745	1.0339	45.9540
40	55	1.0016	45.0458	1.0626	46.7382	1.1064	47.8919	1.1330	48.5673
50	57.5	1.1009	47.7487	1.1679	49.4287	1.2161	50.5685	1.2453	51.2339
4	0	1.2147	50.5379	1.2887	52.1896	1.3418	53.3050	1.3741	53.9540
10	62.5	1.3472	53.4150	1.4293	55.0213	1.4882	56.1010	1.5239	56.7274
20	65	1.5040	56.3804	1.5956	57.9235	1.6614	58.9559	1.7013	59.5531
30	67.5	1.6932	59.4333	1.7963	60.8948	1.8703	61.8681	1.9152	62.4296
40	70	1.9269	62.5719	2.0442	63.9329	2.1285	64.8353	2.1796	65.3545
50	72.5	2.2243	65.7925	2.3598	67.0343	2.4571	67.8543	2.5161	68.3249
5	0	2.6174	69.0901	2.7768	70.1946	2.8913	70.9211	2.9607	71.3371
10	77.5	3.1635	72.4579	3.3561	73.4079	3.4945	74.0308	3.5784	74.3868
20	80	3.9774	75.8873	4.2196	76.6676	4.3936	77.1778	4.4991	77.4688
30	82.5	5.3271	79.3682	5.6515	79.9657	5.8845	80.3555	6.0258	80.5775
40	85	8.0162	82.8852	8.5044	83.2936	8.8550	83.5569	9.0676	83.7067
50	87.5	16.0630	86.4377	17.0412	86.6417	17.7439	86.7744	18.1699	86.8498
6	0		90.0000		90.0000		90.0000		90.0000

mità della linea delle ore VI. Ciò vale per entrambi i quadranti, essendo, in base alle equazioni (6) e (6'), un quadrante orizzontale calcolato per la latitudine  $\varphi$  equivalente a tutti gli effetti ad un quadrante verticale calcolato per la latitudine  $90^\circ - \varphi$ . L'unica differenza sostanziale consiste nel fatto che nel quadrante orizzontale lo gnomone inizia a proiettare la sua ombra non appena sorge il Sole, quale che

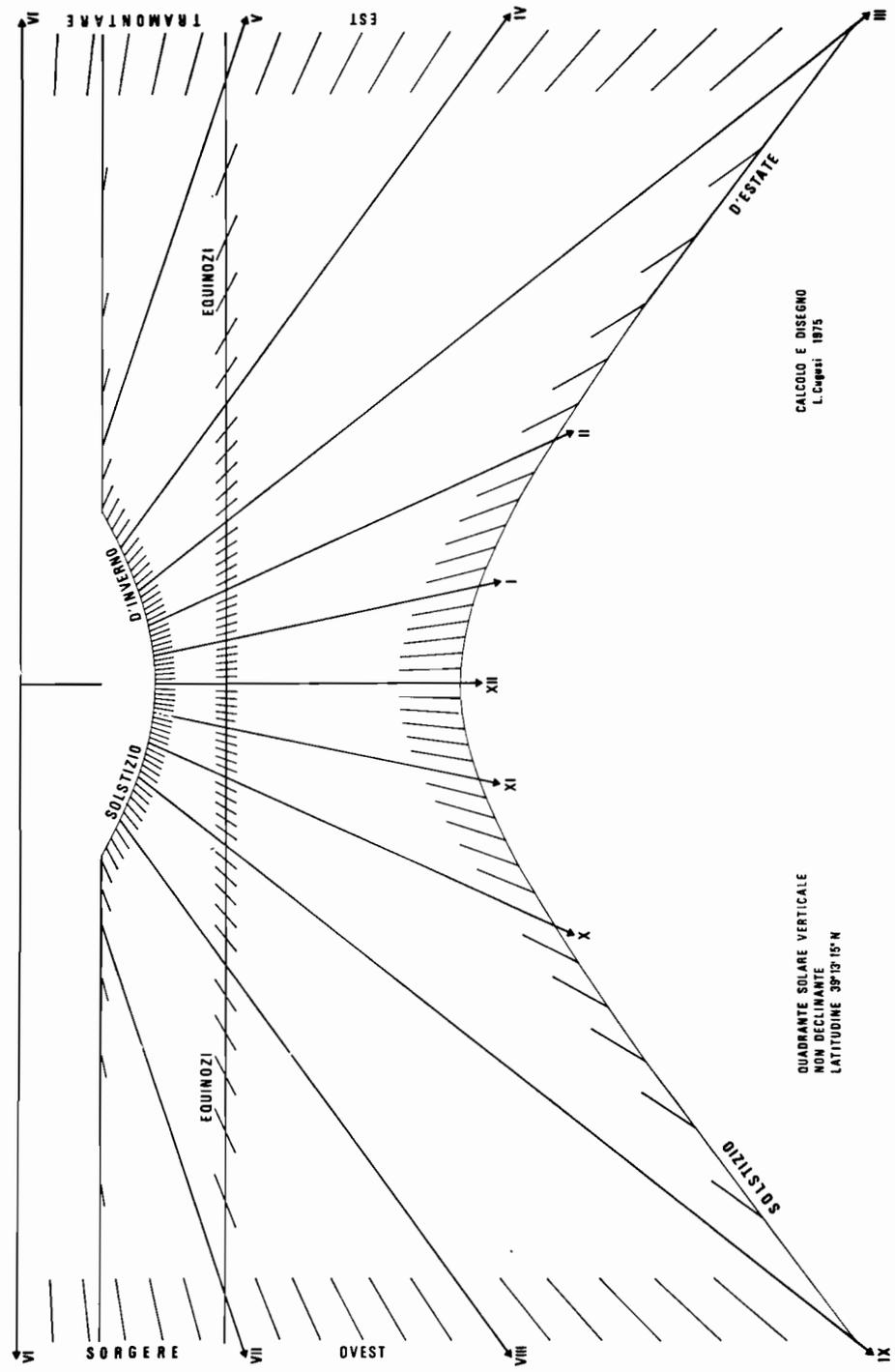


Fig. 9  
 Linee orarie e linee di declinazione del quadrante solare verticale non declinante.

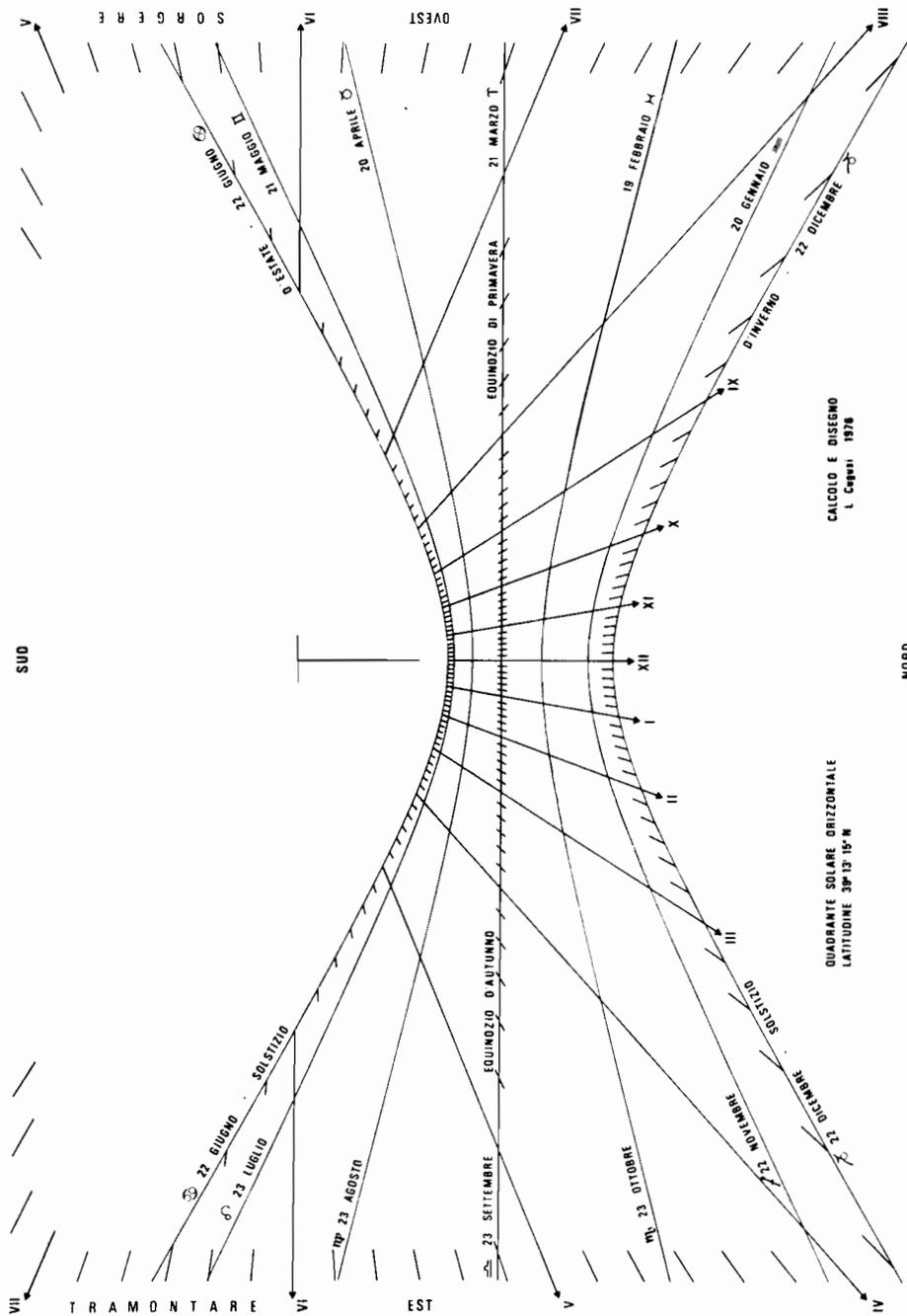


Fig. 10  
 Linee orarie e linee di declinazione del quadrante sc

sia il giorno dell'anno, mentre per il quadrante verticale ciò avviene solo quando il Sole ha azimut maggiore di  $270^\circ$  ma minore di  $90^\circ$ , sta cioè dalla parte del punto cardinale sud rispetto al primo verticale: ne consegue che solo tra l'equinozio di autunno e l'equinozio di primavera il quadrante verticale funziona tutto il giorno, mentre le maggiori limitazioni si hanno al solstizio d'estate.

Resta ora da chiarire la natura delle curve tracciate sui quadranti, che un lettore attento avrà riconosciuto essere delle iperboli, e della retta contrassegnata con la scritta *equinozi*. Diciamo subito che esse sono linee di declinazione equivalenti alle circonferenze di declinazione tracciate sul quadrante equatoriale: ora infatti il piano (orizzontale o verticale) che interseca il cono d'ombra generato dallo gnomone (si vedano le fig. 11 e 12) non è perpendicolare all'asse del cono, ma forma con esso un angolo minore della semiapertura del cono stesso. Precisiamo meglio il discorso.

È noto dalla teoria delle coniche (circonferenze, ellissi, parabole, iperboli) che esse si possono ottenere intersecando un cono rotondo indefinito di semiapertura  $\alpha$  con un piano formante con l'asse del cono un angolo  $\alpha'$ : se  $\alpha' > \alpha$  si ottengono delle ellissi; se  $\alpha' = \alpha$  delle parabole; se  $\alpha' < \alpha$  delle iperboli; il caso infine in cui  $\alpha' = 90^\circ > \alpha$  un caso del tutto particolare in cui si ottengono delle circonferenze. Cerchiamo ora di applicare queste considerazioni al caso specifico.

La semiapertura  $\alpha$  del cono d'ombra vale  $90^\circ - |\delta|$  e dunque varia con  $\delta$  a secondo dell'epoca dell'anno, ma in valore assoluto è sempre  $66,5 \leq \alpha < 90^\circ$ , valendo il segno di uguaglianza in corrispondenza dei solstizi (il caso  $\alpha = 90^\circ$  che pure si verifica verrà trattato in seguito). D'altra parte facendo riferimento al quadrante verticale (fig. 11), l'angolo  $\alpha'$  secondo il quale il piano interseca l'asse del cono d'ombra vale  $90^\circ - \varphi$ . Le conclusioni che si possono trarre sono pertanto le seguenti: le curve di declinazione saranno

ellissi	quando $90^\circ - \varphi > 90^\circ - \delta$	e quindi se $\varphi < \delta$
parabole	quando $90^\circ - \varphi = 90^\circ - \delta$	e quindi se $\varphi = \delta$
iperboli	quando $90^\circ - \varphi < 90^\circ - \delta$	e quindi se $\varphi > \delta$

Il risultato può essere commentato nel modo seguente, per quanto riguarda il nostro emisfero boreale in cui la latitudine  $\varphi$  è sempre maggiore di zero:

- per tutte le località al di sopra del tropico del cancro  $\varphi$  è sempre  $> \delta$  (che al massimo vale  $23,5$ ) e quindi si ottengono sempre iperboli;
- nelle località comprese tra l'equatore ed il tropico del cancro, secondo il periodo dell'anno si potranno avere ellissi, parabole o iperboli.

Ad esempio per una località come Addis Abeba, la cui latitudine è di circa  $+9^\circ$ , si avranno parabole all'incirca il 13-14 aprile e il 30-31 agosto ( $\delta = +9^\circ$ );

ellissi tra il 15 aprile ed il 29 agosto ( $\delta > 90^\circ$ ); iperboli durante tutto il resto dell'anno ( $\delta < 90^\circ$ ).

Per quanto riguarda il quadrante orizzontale, il cui piano interseca l'asse del cono d'ombra secondo un angolo eguale a  $\varphi$  (fig. 12), le curve di declinazione saranno:

ellissi	quando $\varphi > 90^\circ - \delta$	ovvero se $\delta > 90^\circ - \varphi$
parabole	quando $\varphi = 90^\circ - \delta$	ovvero se $\delta = 90^\circ - \varphi$
iperboli	quando $\varphi < 90^\circ - \delta$	ovvero se $\delta < 90^\circ - \varphi$

Il risultato può essere commentato nel seguente modo:

- per tutte le località al di sotto del circolo polare artico  $\varphi$  è sempre  $< 90^\circ - \delta$ , qualunque sia il giorno dell'anno, dunque le curve di declinazione saranno sempre iperboli;
- solo nelle regioni al di sopra del circolo polare artico si potranno avere anche ellissi o parabole ripetendo, mutatis mutandis, il ragionamento fatto in precedenza \*;
- è chiaro infine che al polo nord si avranno sempre e soltanto circonferenze.

In conclusione, combinando i risultati ottenuti separatamente per i quadranti orizzontale e verticale, è importante osservare che per qualunque località compresa tra il tropico del cancro ed il circolo polare artico si otterranno come curve di declinazione sempre delle iperboli per entrambi i quadranti.

Resta ora da chiarire l'origine della retta equinoziale.

Si comprende facilmente che, agli equinozi, giacendo il Sole sull'equatore celeste, l'estremità dello gnomone genera non una superficie conica d'ombra, ma un piano d'ombra, la cui intersezione con i piani orizzontale e verticale non può che essere una retta (si vedano le fig. 11b e 12b), la retta equinoziale appunto, che viene descritta due volte all'anno.

Sul quadrante verticale riprodotto nella fig. 9 e nella Tavola II sono tracciate solo le due iperboli corrispondenti ai solstizi che delimitano la regione del piano entro cui cade sempre l'estremità dell'ombra dello gnomone: inoltre l'iperbole che corrisponde al solstizio d'inverno è interrotta dalla retta orizzontale passante per il piede della perpendicolare abbassata dall'estremità dello gnomone al piano verticale (si veda la fig. 11a') retta che ha equazione:

$$y = -\ell \sin\varphi \quad (7)$$

al di sopra della quale si può dimostrare che non ha senso tracciare le linee di declinazione.

Sul quadrante orizzontale invece (fig. 10 e Tavola III) sono tracciate le iperboli di declinazione corrispondenti all'entrata del Sole nei differenti segni zodiacali. Nella tabella 4 sono elencati i segni zodiacali, i loro simboli, i giorni in cui il

\* Si tenga inoltre ben presente che nelle regioni artiche il Sole non sorge quando la sua declinazione è  $< \varphi - 90^\circ$ .

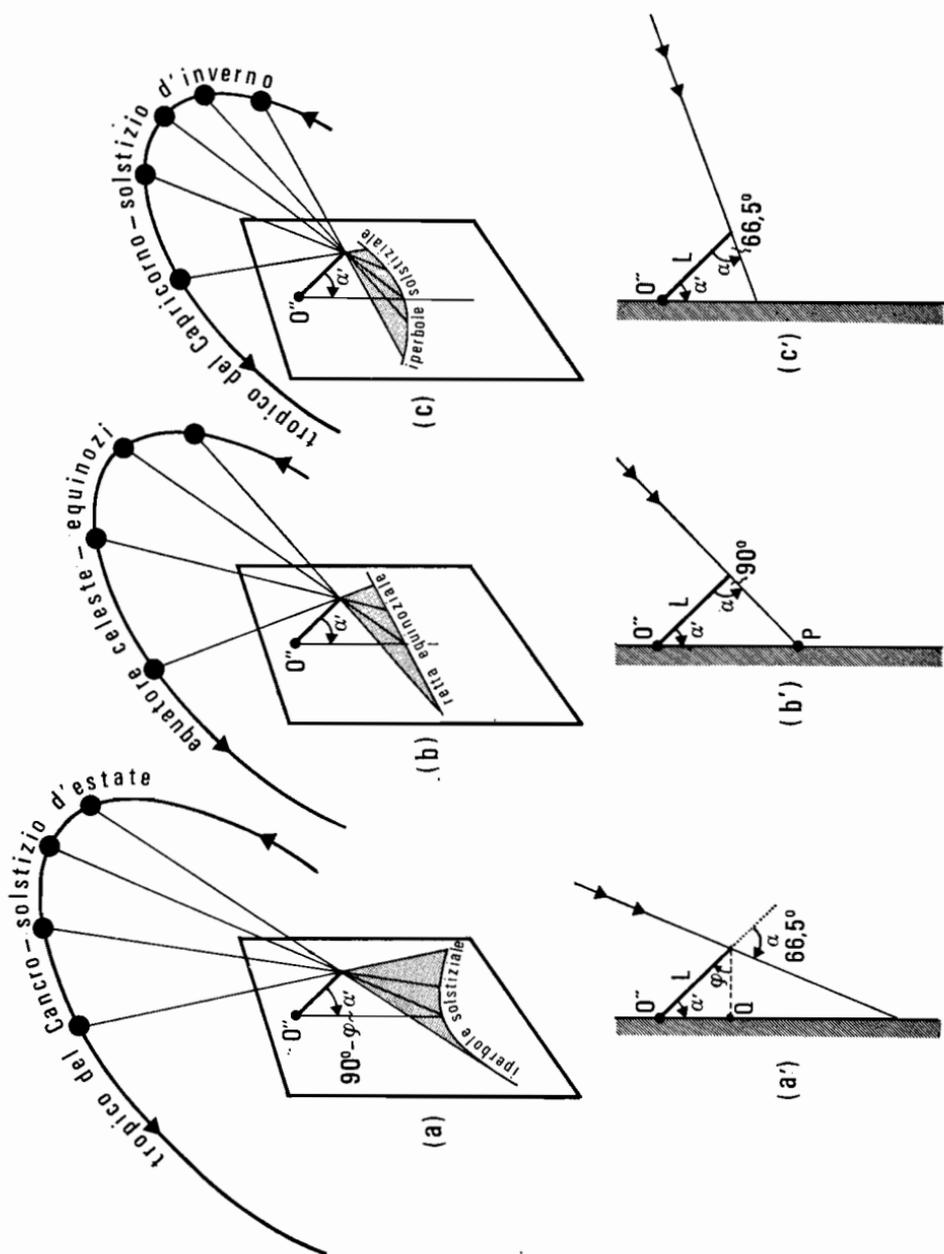


FIG. 11

Schematizzazione del cono d'ombra e delle linee di declinazione del quadrante solare verticale non declinante.

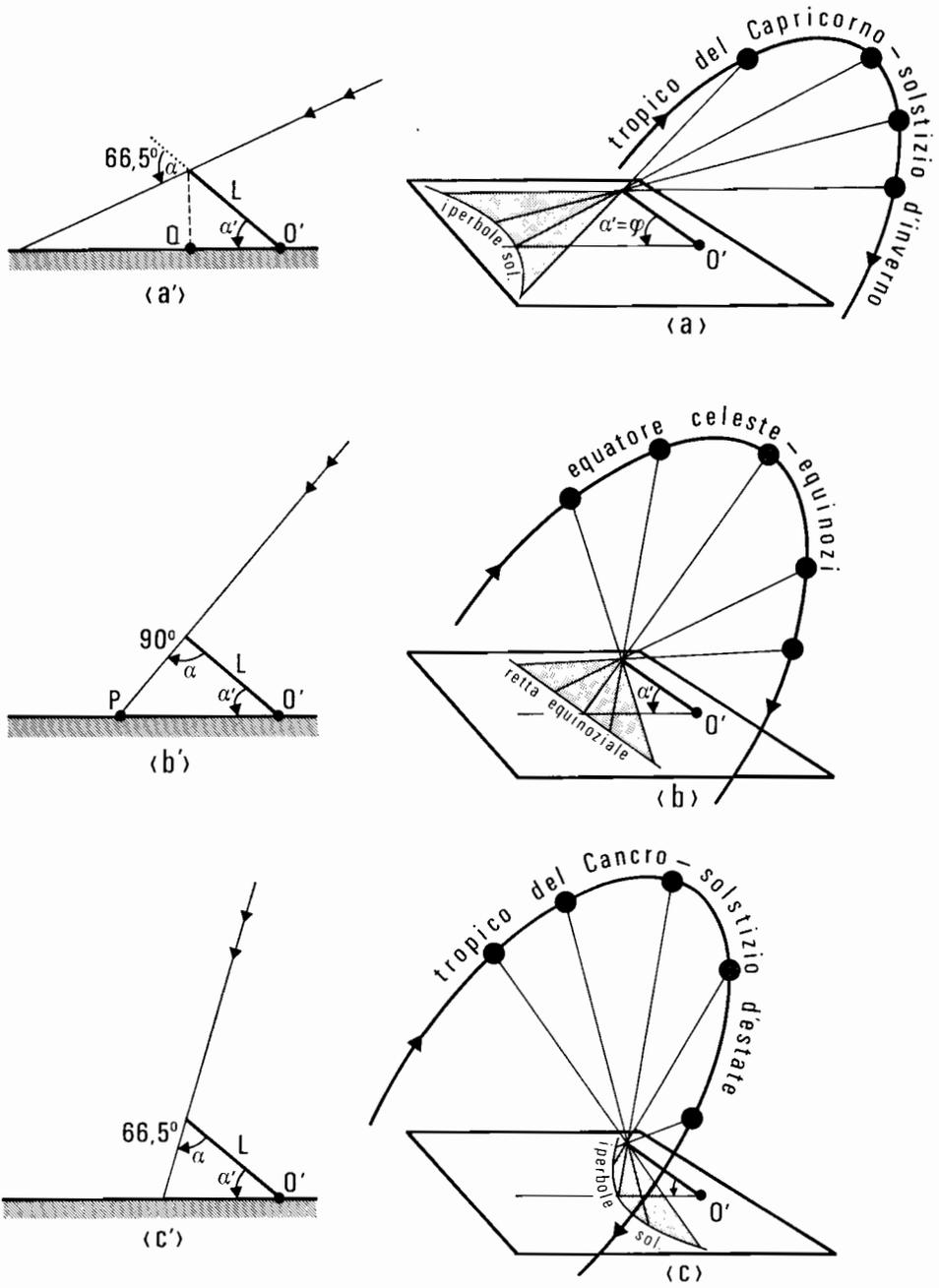


FIG. 12

Schematizzazione del cono d'ombra e delle linee di declinazione del quadrante solare orizzontale.

TABELLA 4 - Ingresso del Sole nei segni zodiacali ed inizio delle stagioni.

Segni zodiacali	simboli	data di ingresso (approssimata)	declinazione del Sole	osservazioni
Ariete	♈	20 Marzo	0°00'	inizio della primavera
Toro	♉	20 Aprile	11 28	
Gemelli	♊	21 Maggio	20 09	
Cancro	♋	22 Giugno	23 27	inizio dell'estate
Leone	♌	23 Luglio	20 09	
Vergine	♍	23 Agosto	11 28	
Bilancia	♎	23 Settembre	0 00	inizio dell'autunno
Scorpione	♏	23 Ottobre	-11 28	
Sagittario	♐	22 Novembre	-20 09	
Capricorno	♑	22 Dicembre	-23 27	inizio dell'inverno
Aquario	♒	20 Gennaio	-20 09	
Pesci	♓	19 Febbraio	-11 28	

Sole entra in ognuno di essi (valori mediati su un periodo di quattro anni con la conseguente possibilità che si verifichi una discordanza massima di un giorno a seconda dell'anno) ed i corrispondenti valori della declinazione del Sole, utilizzati per il calcolo delle iperboli di declinazione. Il quadrante solare così completato serve non solo da orologio solare ma anche da calendario solare, essendo possibile, secondo la curva di declinazione descritta dall'ombra, risalire approssimativamente al giorno.

Qui di seguito sono riportate le equazioni delle iperboli di declinazione per i due quadranti, non essendo possibile descrivere in questa sede il procedimento attraverso il quale si giunge a ricavare le equazioni stesse. Facendo riferimento ai sistemi di assi cartesiani precedentemente introdotti, l'equazione delle iperboli di declinazione per il quadrante orizzontale è:

$$x^2 + y^2 [1 - \cos^2\phi (1 + \cotg^2\delta)] - 2 \ell y \cos\phi \cotg^2\delta - \ell^2 \cotg^2\delta = 0 \quad (8)$$

mentre per il quadrante verticale, operata la consueta sostituzione, si ha:

$$x^2 + y^2 [1 - \sin^2\phi (1 + \cotg^2\delta)] - 2 \ell y \sin\phi \cotg^2\delta - \ell^2 \cotg^2\delta = 0 \quad (8')$$

È facile accorgersi che le precedenti equazioni non sono valide per  $\delta=0$ : in questo caso si ha infatti la retta equinoziale che, per essere perpendicolare alla retta meridiana o asse delle  $y$ , avrà equazione del tipo  $y = \text{cost}$ . Dalle fig. 11b' e 12b'

l'equazione della retta equinoziale può essere ottenuta facilmente esprimendo le misure dei segmenti O''P e O'P (intercette sull'asse delle y della retta equinoziale) in funzione della lunghezza  $\ell$  dello gnomone e dell'angolo  $\alpha'$ , legato alla latitudine del luogo dalle relazioni già viste: per il quadrante orizzontale si ottiene:

$$y = - \frac{\ell}{\cos\varphi} \quad (9)$$

e per il quadrante verticale:

$$y = - \frac{\ell}{\sin\varphi} \quad (9')$$

il segno negativo essendo dovuto, come nel caso dell'equazione (7), alla particolare orientazione dell'asse delle y.

### 5. Quadrante solare orizzontale analemmatico

A conclusione di questa breve rassegna di quadranti solari è opportuno descrivere un tipo di quadrante apparentemente molto semplice che è costituito, come lo strumento primordiale descritto nell'introduzione, da uno gnomone verticale e da un piano orizzontale, il cui funzionamento però è stato chiarito solo relativamente di recente. Ad esso si dà il nome di quadrante solare orizzontale analemmatico, facendo riferimento al particolare tipo di proiezione ortogonale dallo zenit sul piano orizzontale utilizzata per rappresentarlo: in effetti l'aggettivo analemmatico deriva dal sostantivo greco *ἀνάλημμα* ovvero dal verbo *ἀναλαμβάνω* la cui libera traduzione potrebbe suonare « proiettare dall'alto ».

Si faccia riferimento alle fig. 13 e 14: la prima è una proiezione ortogonale della sfera celeste (già rappresentata nella fig. 4) sul piano meridiano, mentre nella seconda la medesima sfera celeste è proiettata ortogonalmente sul piano dell'orizzonte. Come si vede in quest'ultima figura l'equatore celeste è proiettato sull'orizzonte secondo un'ellisse tangente l'orizzonte stesso nei punti cardinali est e ovest: ogni altro cerchio della sfera celeste parallelo all'equatore, come per esempio i due tropici, viene proiettato sull'orizzonte secondo un'ellisse simile (cioè avente la stessa eccentricità) alla precedente, ma avente differente semiasse maggiore ed il centro slittato secondo la direzione nord-sud.

Se il Sole descrivesse sempre e soltanto l'equatore celeste, cioè avesse sempre declinazione nulla, sarebbe molto semplice calcolare il quadrante analemmatico. Si osservi la fig. 15. Facendo riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali OXY sul piano dell'orizzonte, con l'origine O coincidente con il centro della sfera celeste e gli assi diretti verso ovest e sud rispettivamente; indicata con S la posizione del Sole sull'equatore celeste ad un generico istante e con S' la sua proiezione ortogonale sul piano dell'orizzonte; indicato inoltre come di consueto con H l'an-

golo orario del Sole e con  $R$  il raggio della sfera celeste, allora le coordinate del punto  $S'$  risultano essere:

$$x = R \sin H \quad (10)$$

$$y = R \cos H \sin \varphi \quad (10')$$

che sono evidentemente le coordinate di un generico punto di un'ellisse la cui equazione può essere ottenuta quadrando e sommando le (10) e (10'):

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 \sin^2 \varphi} = 1 \quad (11)$$

L'ellisse proiezione dell'equatore celeste ha dunque semiasse maggiore  $R$ , semiasse minore  $R \sin \varphi$  ed eccentricità  $\cos \varphi$ . Nella tabella 5 sono riportati, per le consuete località, i valori di  $\sin H$  e  $\sin \varphi \cos H$  in base ai quali è possibile tracciare direttamente l'ellisse riportata in fig. 16.

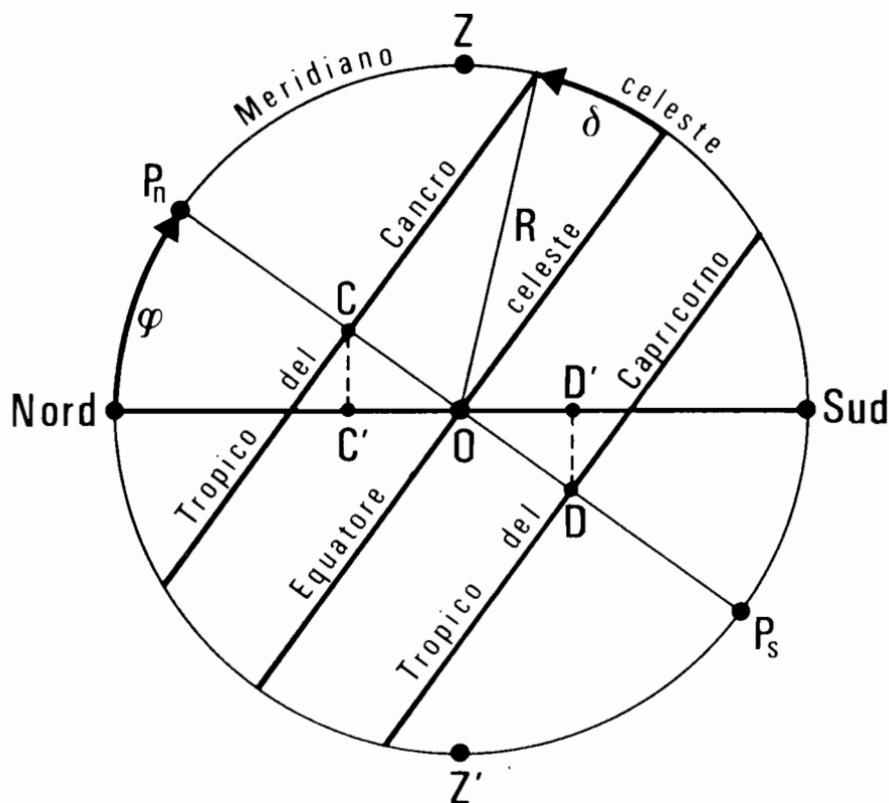


FIG. 13

Proiezione ortogonale della sfera celeste sul piano meridiano.

Collocando in O uno gnomone verticale avremo realizzato un quadrante solare che dà l'ora esatta solo se il Sole giace sull'equatore celeste. In corrispondenza a valori positivi o negativi della declinazione, l'ellisse proiezione del cerchio minore descritto dal Sole sulla sfera celeste non coincide con quella ora tracciata né per dimensioni né per posizione del centro, come già osservato in precedenza. È tuttavia possibile correggere la posizione dello gnomone sul quadrante in modo da tenere conto di questi due fatti. Ritornando alla fig. 13 è possibile valutare l'entità dello spostamento del centro dell'ellisse quando  $\delta \neq 0$ . Si ha infatti:

$$OC' = OC \cos\varphi \quad (12)$$

ed essendo:

$$OC = R \sin\delta \quad (13)$$

ne segue:

$$OC' = R \sin\delta \cos\varphi \quad (14)$$

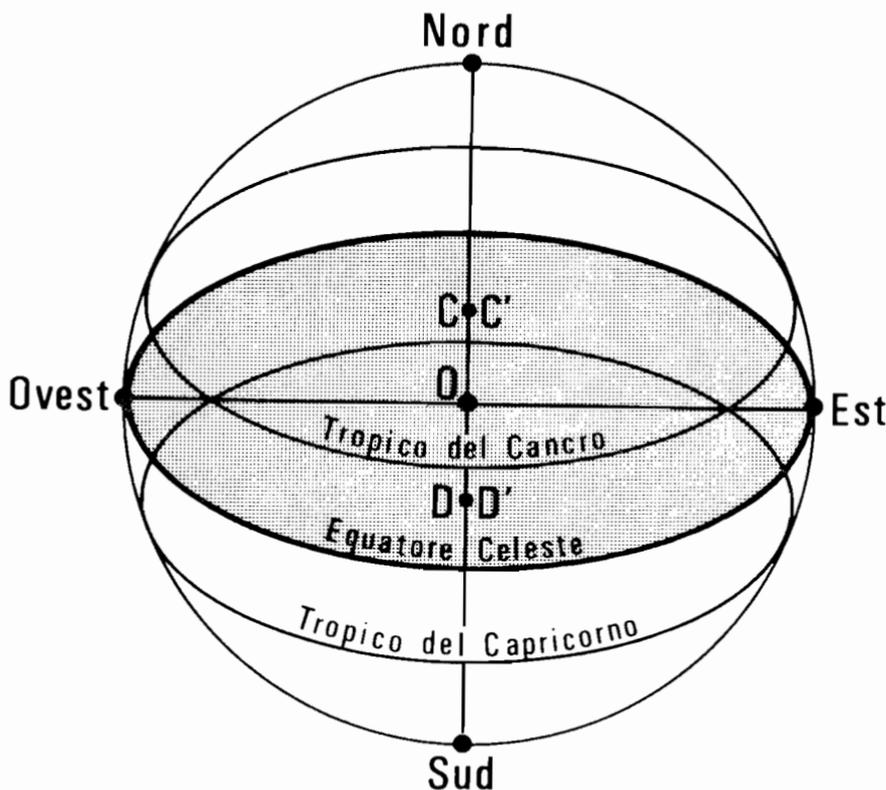


FIG. 14

Proiezione ortogonale della sfera celeste sul piano dell'orizzonte.

Infine non resta che introdurre una correzione dovuta alla variazione di dimensioni dell'ellisse: se il semiasse maggiore dell'ellisse *madre* (corrispondente a  $\delta=0$ ) vale  $R$ , ogni altra ellisse ha semiasse maggiore  $R \cos\delta$ , e dunque  $1/\cos\delta$  è il loro rapporto. Introducendo questo fattore correttivo nella espressione di  $OC'$  trovata precedentemente, si ha l'espressione finale:

$$OC' = R \operatorname{tg}\delta \operatorname{cosp} \quad (15)$$

Conferendo allo gnomone di giorno in giorno uno spostamento in accordo con quest'ultima equazione (positivo ovvero verso il punto cardinale nord d'estate, negativo ovvero verso il punto cardinale sud d'inverno), il quadrante solare darà indicazioni esatte tutto l'anno.

Nella tabella 6 sono riportati i valori di  $\operatorname{tg}\delta \operatorname{cosp}$  in base ai quali è stata tracciata la scala delle posizioni dello gnomone sul semiasse minore dell'ellisse raffigurata sul quadrante analematico rappresentato nella fig. 16 e nella Tavola IV.

Per questo quadrante orizzontale è possibile ripetere circa le curve di declinazione il ragionamento già fatto precedentemente per l'altro quadrante orizzon-

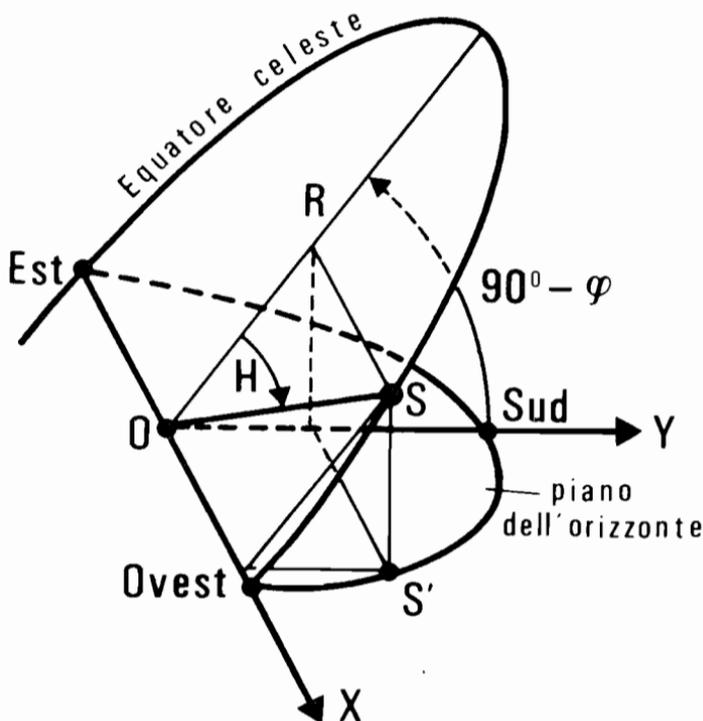


FIG. 15

Proiezione ortogonale dell'equatore celeste sul piano dell'orizzonte.

TABELLA 5 - Quadrante solare analematico: coordinate dei punti dell'ellisse madre, espresse in unità del semiasse maggiore, in funzione dell'angolo orario del Sole.

H			MILANO		ROMA	CAGLIARI	CATANIA
			sin H	sin $\varphi$ cosH	sin $\varphi$ cosH	sin $\varphi$ cosH	sin $\varphi$ cosH
0 <sup>h</sup>	0 <sup>m</sup>	0°	0	0.7128	0.6681	0.6323	0.6088
10	2.5		0.0436	0.7122	0.6675	0.6317	0.6082
20	5		0.0872	0.7101	0.6656	0.6299	0.6065
30	7.5		0.1305	0.7067	0.6624	0.6269	0.6036
40	10		0.1736	0.7020	0.6580	0.6227	0.5996
50	12.5		0.2164	0.6959	0.6523	0.6173	0.5944
1	0	15	0.2588	0.6885	0.6454	0.6108	0.5881
10	17.5		0.3007	0.6798	0.6372	0.6030	0.5806
20	20		0.3420	0.6698	0.6278	0.5942	0.5721
30	22.5		0.3827	0.6586	0.6173	0.5842	0.5625
40	25		0.4226	0.6461	0.6055	0.5731	0.5518
50	27.5		0.4617	0.6323	0.5926	0.5609	0.5400
2	0	30	0.5000	0.6173	0.5786	0.5476	0.5272
10	32.5		0.5373	0.6012	0.5635	0.5333	0.5135
20	35		0.5736	0.5839	0.5473	0.5180	0.4987
30	37.5		0.6088	0.5655	0.5301	0.5016	0.4830
40	40		0.6428	0.5461	0.5118	0.4844	0.4664
50	42.5		0.6756	0.5256	0.4926	0.4662	0.4489
3	0	45	0.7071	0.5041	0.4724	0.4471	0.4305
10	47.5		0.7373	0.4816	0.4514	0.4272	0.4113
20	50		0.7660	0.4582	0.4295	0.4064	0.3913
30	52.5		0.7934	0.4339	0.4067	0.3849	0.3706
40	55		0.8192	0.4089	0.3832	0.3627	0.3492
50	57.5		0.8434	0.3830	0.3590	0.3397	0.3271
4	0	60	0.8660	0.3564	0.3341	0.3162	0.3044
10	62.5		0.8870	0.3292	0.3085	0.2920	0.2811
20	65		0.8063	0.3013	0.2824	0.2672	0.2573
30	67.5		0.9239	0.2728	0.2557	0.2420	0.2330
40	70		0.9397	0.2438	0.2285	0.2163	0.2082
50	72.5		0.9537	0.2144	0.2009	0.1901	0.1831
5	0	75	0.9659	0.1845	0.1729	0.1637	0.1576
10	77.5		0.9763	0.1543	0.1446	0.1369	0.1318
20	80		0.9848	0.1238	0.1160	0.1098	0.1057
30	82.5		0.9914	0.0930	0.0872	0.0825	0.0795
40	85		0.9962	0.0621	0.0582	0.0551	0.0531
50	87.5		0.9990	0.0311	0.0291	0.0276	0.0266
6	0	90	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

tale, facendo la debita attenzione al fatto che ora lo gnomone è mobile: in ogni caso le curve sono sempre iperboli tranne che agli equinozi.



TABELLA 6 - Quadrante solare analemmatico: posizioni dello gnomone sul semiasse minore dell'ellisse madre, espresse in unità del semiasse maggiore, in funzione del giorno dell'anno, cioè della declinazione del Sole.

		$\delta$	$g \delta \cos \varphi$			
			MILANO	ROMA	CAGLIARI	CATANIA
Gennaio	1	-23°04'	-0.2987	-0.3168	-0.3299	-0.3378
	11	-21°56'	0.2824	0.2996	0.3120	0.3194
	21	-20 05	0.2564	0.2720	0.2832	0.2901
Febbraio	1	-17 20	0.2189	0.2322	0.2418	0.2476
	11	-14 18	0.1788	0.1897	0.1975	0.2022
	21	-10 52	0.1346	0.1428	0.1487	0.1523
Marzo	1	- 7 49	0.0963	0.1021	0.1064	0.1089
	11	- 3 57	0.0484	0.0514	0.0535	0.0548
	21	0 00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Aprile	1	+ 4 18	+0.0527	+0.0559	+0.0583	+0.0596
	11	8 07	0.1000	0.1061	0.1105	0.1131
	21	11 39	0.1446	0.1534	0.1597	0.1636
Maggio	1	14 54	0.1866	0.1980	0.2061	0.2111
	11	17 43	0.2240	0.2377	0.2475	0.2534
	21	20 04	0.2562	0.2718	0.2830	0.2898
Giugno	1	21 58	0.2829	0.3001	0.3125	0.3200
	11	23 02	0.2982	0.3163	0.3294	0.3373
	22	23 26	0.3040	0.3225	0.3358	0.3438
Luglio	1	23 09	0.2999	0.3181	0.3312	0.3392
	11	22 11	0.2860	0.3034	0.3159	0.3235
	21	20 36	0.2636	0.2797	0.2912	0.2982
Agosto	1	18 10	0.2301	0.2441	0.2542	0.2603
	11	15 27	0.1938	0.2056	0.2141	0.2193
	21	12 19	0.1531	0.1625	0.1692	0.1732
Settembre	1	8 30	0.1048	0.1112	0.1158	0.1186
	11	4 48	0.0589	0.0625	0.0651	0.0666
	23	0 00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Ottobre	1	- 2 57	-0.0361	-0.0383	-0.0399	-0.0409
	11	- 6 48	0.0836	0.0887	0.0924	0.0946
	21	-10 29	0.1298	0.1377	0.1434	0.1468
Novembre	1	-14 14	0.1779	0.1887	0.1965	0.2012
	11	-17 15	0.2178	0.2310	0.2406	0.2463
	21	-19 47	0.2523	0.2676	0.2787	0.2854
Dicembre	1	-21 43	0.2793	0.2963	0.3086	0.3160
	11	-22 57	0.2970	0.3151	0.3280	0.3359
	22	-23 26	-0.3040	-0.3225	-0.3358	-0.3438

## 6. Dal tempo solare vero al tempo civile

Si è già accennato al fatto che il tempo segnato da un quadrante solare, chiamato tempo solare vero, differisce in modo sostanziale dal tempo segnato dai nostri orologi, chiamato tempo civile. Ciò avviene fondamentalmente per due ragioni.

Innanzitutto il tempo solare vero ha la caratteristica di essere un tempo non uniforme, contrariamente a quanto accade per il tempo civile che si può affermare

scorrere uniformemente. Per capire il motivo di ciò, si tenga presente innanzi tutto che l'orbita che la Terra descrive attorno al Sole non è un'orbita circolare bensì ellittica, e pertanto, in accordo con la seconda legge di Keplero, viene descritta più rapidamente al perielio (punto di minima distanza dal Sole raggiunto in gennaio), più lentamente all'afelio (punto di massima distanza dal Sole raggiunto in luglio): benché la variazione di velocità orbitale sia piuttosto limitata (30,3 km/s al perielio, contro 29,3 km/s all'afelio), tuttavia il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole deve essere considerato a tutti gli effetti non uniforme, e quindi il Sole per riflesso, ad un osservatore terrestre, appare descrivere l'eclittica in modo non uniforme. Né questa è la sola causa a determinare la non uniformità del moto apparente del Sole: infatti, ammesso pure che il moto del Sole sull'eclittica fosse uniforme, resterebbe un'altra causa tutt'altro che secondaria a far sì che l'angolo orario del Sole non cresca uniformemente, il fatto cioè che il piano dell'eclittica è inclinato rispetto al piano dell'equatore, sul quale viene misurato l'angolo orario. Si noti che questi due fattori, concisamente eccentricità ed obliquità dell'orbita terrestre, contribuiscono in ugual modo a rendere non uniforme il moto apparente del Sole.

Il potersi basare su una scala di tempo uniforme è d'altronde di tale importanza che si è soliti considerare, accanto al Sole vero, un Sole ipotetico, chiamato Sole medio, che ha la proprietà del tutto immaginaria di muoversi di moto uniforme sull'equatore celeste con lo stesso periodo con cui il Sole vero si muove di moto non uniforme sull'eclittica. È allora possibile costruire una scala di tempo, chiamata tempo solare medio, definita come angolo orario del Sole medio incrementato di 12 ore, che ha l'importantissima caratteristica di essere uniforme, e che è possibile mettere in relazione matematica con la scala di tempo solare vero introdotta nel § 3: la differenza tra le due scale, che per i nostri scopi può essere semplicemente definita come differenza tra l'angolo orario del Sole medio e l'angolo orario del Sole vero, prende il nome di equazione del tempo. Benché vi siano delle leggere variazioni di anno in anno, l'equazione del tempo (si veda la fig. 17) si annulla quattro volte nel corso dell'anno, all'incirca il 15-16 aprile, il 14-15 giugno, l'1-2 settembre ed il 25-26 dicembre, giorni in cui il Sole medio coincide con il Sole vero; raggiunge i suoi massimi valori verso il 12 febbraio (il Sole vero è 14,5 minuti in ritardo rispetto al Sole medio) e il 3-4 novembre (il Sole vero è 16,5 minuti in anticipo).

Nella fig. 17 appare riprodotta la ben nota curva a forma di otto o di doppio cappio, chiamata lemniscata del tempo, ottenuta riportando di giorno in giorno in ascisse il valore in minuti dell'equazione del tempo (positivo se il Sole vero è in ritardo rispetto al Sole medio perché positiva è in questo caso la correzione da attribuire al tempo solare vero per ottenere il tempo solare medio, negativo nel caso opposto), in ordinate la declinazione del Sole; inoltre lungo la curva sono segnati i giorni e i mesi dell'anno. Una tale curva viene spesso riprodotta per comodità sui quadranti solari.

Sia il tempo solare vero che il tempo solare medio sono tempi locali, nel senso

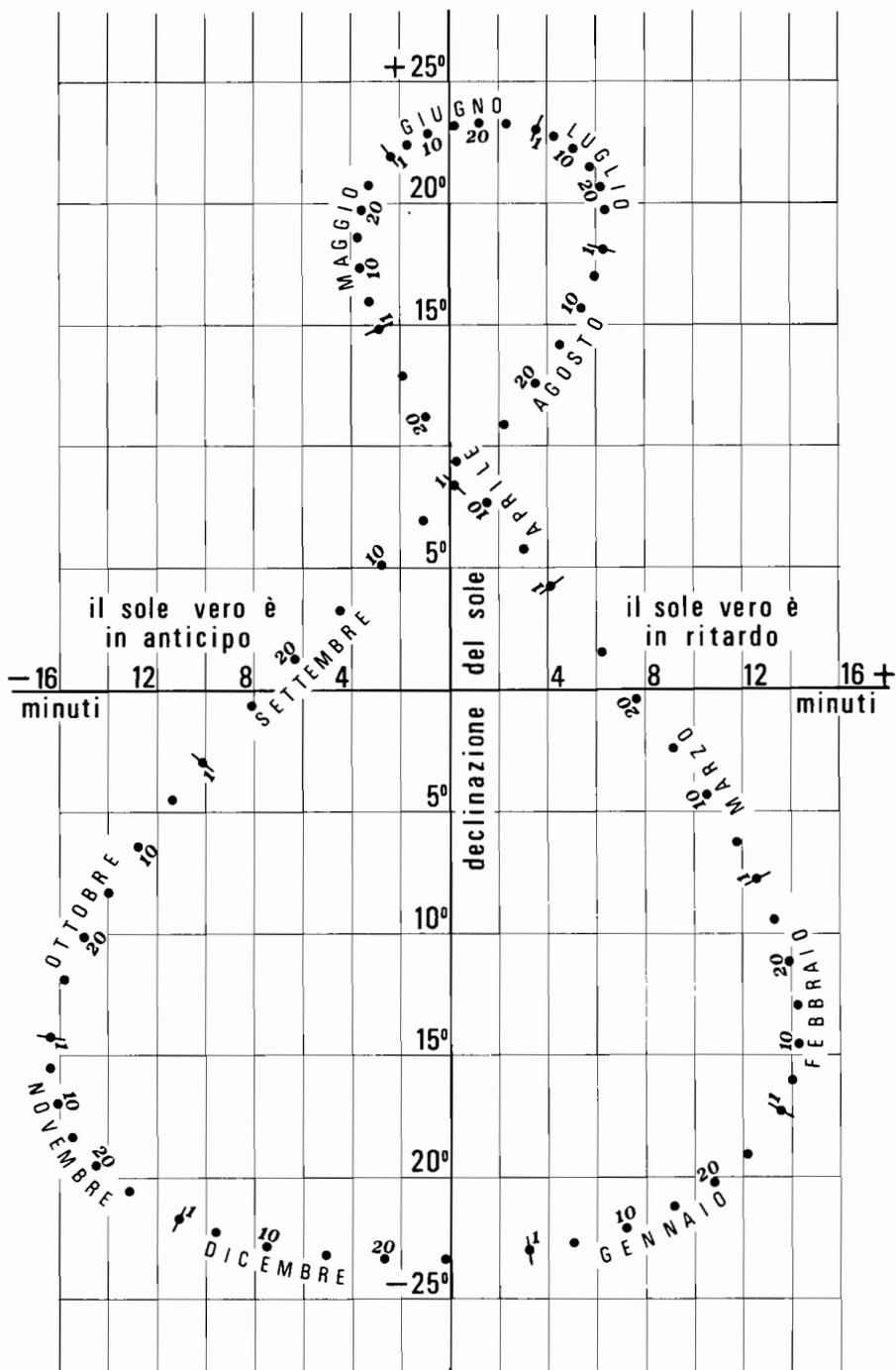


FIG. 17  
 Diagramma dell'equazione del tempo.

che dipendono strettamente dal luogo (o meglio dalla longitudine del luogo) nel quale sono valutati: basta riflettere per esempio sul significato della parola mezzogiorno al passaggio del Sole al meridiano del luogo, per capire che l'istante del suo verificarsi è strettamente legato alla longitudine del luogo. D'altra parte si comprende facilmente che non avrebbe alcun senso, per quanto riguarda l'uso civile dell'ora, che ogni luogo, ogni centro abitato all'interno di un certo stato, avesse la propria ora, differente da quella di tutti gli altri luoghi anche finitimi. Per ovviare a questo inconveniente (il secondo che incontriamo dopo la non uniformità del tempo solare vero) si è ricorsi alla convenzione di suddividere la terra in 24 spicchi sferici o fusi orari, ognuno dell'ampiezza di  $15^\circ$ , all'interno di ognuno dei quali vige l'ora solare media che, a rigore, dovrebbe competere solamente al meridiano centrale del fuso. Il primo fuso orario ha come meridiano centrale quello passante per Greenwich: il tempo solare medio in vigore in esso prende il nome di tempo universale (T.U.), una delle scale di tempo adottata internazionalmente nel campo dell'astronomia. Immediatamente ad est di esso si trova il fuso orario dell'Europa Centrale, al quale l'Italia appartiene: il meridiano centrale del nostro fuso si trova quindi  $15^\circ$  ad est del meridiano di Greenwich (passa all'incirca per l'Etna) e pertanto il tempo medio da noi convenzionalmente in vigore, chiamato tempo medio dell'Europa Centrale (T.M.E.C.) o tempo civile del nostro fuso orario, è in anticipo di 1 ora rispetto al T.U.

Per ricondurre il tempo solare vero, segnato da un quadrante solare in una qualunque località della nostra penisola, al tempo civile segnato dai nostri orologi, occorre pertanto introdurre una seconda correzione oltre a quella prevista dall'equazione del tempo, correzione che deve tener conto di quanto ad est o ad ovest del meridiano centrale del fuso è situata la località. Per esempio Cagliari è  $5^\circ 53'$  a ovest del meridiano dell'Europa Centrale e pertanto la correzione costante da attribuire al tempo medio locale per ottenere il tempo medio del fuso è di  $-23^m 32^s$  (si tenga presente che  $1^h=15^\circ$ ,  $1^m=15'$ ,  $1^s=15''$ ). In generale potremo scrivere la seguente equazione, valida per qualunque località del nostro fuso orario, ma che può essere facilmente generalizzata:

$$\begin{aligned} \text{tempo civile} &= \text{tempo solare medio del meridiano dell'Europa Centrale} \\ &= \text{tempo solare vero} + E + \lambda_F \end{aligned} \quad (15)$$

dove con  $E$  si è indicato il valore dell'equazione del tempo ricavabile per ogni giorno dell'anno dalla fig. 17, e con  $\lambda_F$  la longitudine, espressa in minuti di tempo, rispetto al meridiano centrale del fuso, presa con il segno — se è una longitudine est, con il segno + se è una longitudine ovest (come per Cagliari) \*. Una comune carta geografica nella quale siano tracciati almeno un meridiano ed un parallelo di riferi-

\* Le fotografie riprodotte nelle Tavole I-IV sono state scattate il 26 aprile, quando  $E = -2^m$  approssimativamente; pertanto  $E + \lambda_F = -2^m + 23^m 32^s = +21,5^m$  e in definitiva, l'ora civile dedotta dall'ora segnata dai quadranti ha il seguente valore, esatto presumibilmente entro  $\pm 1^m$ :

(I)	$12^h 21,5^m$	$(12^h 00^m + 21,5^m)$	(II)	$11^h 12,5^m$	$(10^h 51^m + 21,5^m)$
(III)	$9^h 51,5^m$	$(9^h 30^m + 21,5^m)$	(IV)	$16^h 33,5^m$	$(16^h 12^m + 21,5^m)$

mento e di cui si conosca la scala, permette di ricavare con sufficiente approssimazione il valore della longitudine e della latitudine di qualunque località; ove si desideri una maggior precisione, occorrerà consultare per esempio l'Almanacco Astronomico della rivista *Coelum*, nel quale in apposita tabella sono riportate le latitudini e le longitudini (rispetto al meridiano di Greenwich) dei capoluoghi di provincia.

## 7. Note pratiche

Vorrei aggiungere, a conclusione del discorso, alcuni consigli di ordine pratico sulla realizzazione dei quadranti descritti, cioè sul calcolo delle linee orarie e delle linee di declinazione, sul loro tracciamento nonché sull'esatta collocazione dei quadranti stessi.

Diciamo innanzitutto qualche parola sulle dimensioni dei quadranti. Quelli da noi realizzati per scopo didattico, riprodotti nelle Tavole I-IV, hanno dimensioni 50 x 70 cm relativamente grandi che permettono di ottenere una notevole precisione nel tracciamento delle linee, e di apprezzare sul quadrante il minuto di tempo, il che in sostanza, per svariati motivi, rappresenta la massima precisione che si può pretendere dai quadranti solari. Tuttavia è possibile realizzare quadranti di dimensioni anche molto minori, addirittura tascabili, senza per altro perdere molto in precisione, naturalmente ove si ponga molta cura nel realizzarli; inoltre i due quadranti orizzontali si prestano facilmente ad essere tracciati di dimensioni anche notevoli nei cortili, nei giardini, ecc., dopo un accurato livellamento del suolo: per il quadrante verticale non declinante è invece difficile trovare un muro esposto esattamente a sud su cui tracciarlo di grandi dimensioni (il calcolo dei quadranti solari verticali declinanti, il cui piano cioè forma un certo angolo con la direzione est-ovest ossia con il primo verticale, è stato qui omesso, considerate le maggiori difficoltà cui si va incontro nell'affrontarlo).

Il materiale utilizzato per costruire gli esemplari mobili può essere di differenti tipi, dal tamburato di legno al trucciolato di legno che, per essere perfettamente piano, ben si adatta allo scopo, alla lamiera di alluminio od ottone per i quadranti di dimensioni minori: la tecnica della fotoincisione dà in quest'ultimo caso risultati veramente eccellenti.

La realizzazione degli gnomoni del quadrante equatoriale e di quello orizzontale analematico non presenta particolari problemi, potendo essere utilizzata allo scopo tutta una gamma di materiali differenti, come grossi aghi da materasso, ferri da calza oppure tubetti di ottone o di alluminio che non mancano nei negozi di modellismo: si noti comunque che lo gnomone del quadrante analematico, dovendo essere mobile, sarà montato su di una slitta scorrevole tra due binari, come si vede nella Tavola IV, a meno che il quadrante non sia di grandi dimensioni, nel qual caso lo gnomone potrà essere dotato semplicemente di una base a treppiede. Gli gnomoni dei due quadranti verticale e orizzontale è bene che vengano realiz-

zati, piuttosto che con delle asticciuole, che difficilmente conservano l'inclinazione desiderata in un piccolo quadrante, con dei triangoli rettangoli (aventi ipotenusa  $\ell$  e i due angoli acuti eguali a  $\varphi$  e a  $90^\circ - \varphi$  in accordo con le fig. 11a' e 12a') ritagliati con la massima cura da un pezzo di lamierino di ferro zincato, ottone o alluminio: si avrà cura di realizzare anche un rettangolo di dimensioni opportune su cui saldarli o comunque fissarli perpendicolarmente, che fungerà da base da applicare al quadrante. Nel caso di un quadrante fisso di grandi dimensioni, è invece possibile infiggere nel suolo o nel muro una robusta asta di ferro, sorreggendola con opportuni rinforzi affinché mantenga nel tempo l'inclinazione desiderata.

I quadranti mobili dovranno poggiare su viti calanti di registrazione, facilmente realizzabili con bulloni e dadi, in modo da poter conferire loro un assetto corretto. Ciò è particolarmente semplice per i quadranti orizzontali, ai quali si tratta semplicemente di conferire una buona orizzontabilità servendosi di una comune livella: quindi si ruoterà il quadrante sino a che segni l'ora prevista, cioè, secondo l'equazione (15), l'ora civile meno l'equazione del tempo e la longitudine del luogo. Al quadrante verticale occorre applicare un filo a piombo alla base dello gnomone: si agirà sulle viti di regolazione sino a che siano verificate contemporaneamente le due condizioni seguenti, cioè che il filo a piombo sia parallelo al piano del quadrante e coincida con la linea meridiana; a questo punto si ruoterà il quadrante (facendo attenzione a che siano mantenute le due condizioni suddette) sino a quando segnerà l'ora esatta, essendo allora sicuri che esso coincide con il primo verticale. Per stabilire in modo meno empirico se l'orientazione del quadrante è esatta, si potrebbe determinare l'istante in cui il Sole dà un'ombra esattamente radente sul quadrante, ossia è bisecato dal piano del quadrante, e calcolare quindi l'azimut del Sole in quell'istante: se il valore di questa coordinata differisce in modo sensibile da  $270^\circ$  o da  $90^\circ$ , il quadrante non coincide con il primo verticale e deve pertanto essere ulteriormente registrato. Operazione ancor più delicata è il conferire l'assetto corretto al quadrante equatoriale. Occorrerà anzitutto applicare due mezzigonometri muniti di filo a piombo, uno su ognuno dei lati del quadrante (si veda la Tavola I) facendo attenzione che la linea dello zero coincida esattamente con il piano del quadrante: i due goniometri permetteranno di conferire al quadrante l'esatta inclinazione rispetto al piano orizzontale. Quindi si dovrà verificare che un terzo filo a piombo, fissato questa volta alla base dello gnomone, coincida con la linea meridiana, operazione questa molto problematica considerato l'attrito che esso incontra sulla superficie inclinata del quadrante. Infine si ruoterà il quadrante sino ad ottenere l'ora esatta: lo gnomone sarà allora finalmente diretto secondo il polo celeste nord.

Livelle o fili a piombo dovranno essere opportunamente incorporati negli orologi solari tascabili, unitamente con una piccola bussola per la corretta orientazione del quadrante.

Il tracciamento delle linee orarie e delle linee di declinazione deve essere effettuato con la massima cura: si è qui preferito il calcolo per via analitica che per

mette una maggior precisione rispetto ai metodi basati esclusivamente sulle costruzioni grafiche.

Il quadrante più semplice da realizzare da questo punto di vista è senz'altro quello equatoriale che richiede il tracciamento di una o più circonferenze di declinazione, secondo l'equazione (2). La suddivisione in angoli potrà essere effettuata direttamente con un goniometro di grandi dimensioni, oppure con il compasso: sarà bene fermarsi, nel tracciamento delle rette orarie, al valore previsto dall'equazione (1).

Per tracciare il quadrante orizzontale analematico è indispensabile fornirsi di carta millimetrata: i punti che individuano l'ellisse (6 per ogni ora e quindi complessivamente 90 per 15 ore di luce) saranno riportati secondo le loro coordinate cartesiane ortogonali, riferite al sistema Oxy precedentemente introdotto, calcolate tramite le equazioni (10) e (10'), dove  $R$  ha un valore scelto arbitrariamente che determina il semiasse maggiore dell'ellisse; il lettore che abita nei pressi delle città riportate nella tabella 5, o comunque alla stessa latitudine, potrà vantaggiosamente servirsi dei valori già tabulati che dovranno essere moltiplicati per il fattore  $R$  scelto. Non è consigliabile tracciare le linee orarie che si dipartono dall'origine degli assi in quanto si è visto che il punto radiante è mobile. La scala che appare sul semiasse minore dell'ellisse verrà calcolata in base all'equazione (15) oppure verrà tracciata direttamente basandosi sulla tabella 6: gli spostamenti si intendono in questo caso positivi verso il punto cardinale nord, negativi verso il punto cardinale sud.

Per quanto riguarda i quadranti orizzontale e verticale sono possibili due soluzioni: la prima più semplice prevede il tracciamento delle rette orarie riportando con un goniometro, dopo aver tracciato la retta meridiana, gli angoli  $H'$  (o  $H''$ ) dati dall'equazione (6a) (o 6'a), oppure tratti dalla tabella 2 (o 3). La seconda consiste nel calcolare almeno un punto di ogni retta oraria secondo l'equazione (6b) (o 6'b): per ottenere la massima cura nel tracciamento delle rette, sarà bene che il punto cada sui bordi laterale o inferiore del quadrante. Verranno quindi tracciate perpendicolarmente alla retta meridiana la retta equinoziale secondo la (9) (o 9'), e, nel quadrante verticale, la retta definita dall'equazione (7). L'ultimo passo consiste nel tracciare per punti le iperboli di declinazione secondo l'equazione (8) (o 8'), ma in alternativa, essendo i calcoli piuttosto lunghi, è possibile tracciare le iperboli in modo empirico, attendendo i giorni in cui il Sole entra nei segni zodiacali (vedere la tabella 4) e segnando sul quadrante la curva che l'estremità dell'ombra dello gnomone descrive via via in quel giorno. A causa di serie difficoltà nascenti dal fatto che nell'equazione (8) (o 8') intervengono come variabili, oltre alla latitudine del luogo, anche la lunghezza  $\ell$  dello gnomone e indirettamente le dimensioni del quadrante, non è stato possibile riportare alcuna tabella numerica. Ove però si disponesse di un calcolatore tascabile sarebbe possibile portare a termine in un tempo ragionevole il calcolo dei 60 o 120 punti (10 o 20 per ogni iperbole) richiesti per il tracciamento delle curve: ma lo strumento che semplifica

veramente il problema è il calcolatore tascabile programmabile (tipo HP 21, 55 o 65, Texas Instrument 52-A ecc.). Fissati allora i valori di  $\varphi$ , latitudine del luogo, di  $\ell$ , lunghezza dello gnomone, in funzione delle dimensioni del quadrante, e di  $\delta$ , declinazione del Sole, secondo la tabella 4, si incrementi partendo da zero la variabile  $x$  di una quantità costante e positiva (1 cm, 5 cm, 10 cm ecc. secondo le dimensioni del quadrante e la precisione che si vuol ottenere) calcolando di volta in volta il valore della variabile  $y$  secondo la seguente espressione, valida per il quadrante orizzontale, ottenuta esplicitando l'equazione (8) rispetto alla  $y$ :

$$y = \frac{\ell \cos\varphi \cotg^2\delta \pm [\ell^2 \cotg^2\delta \sin^2\varphi + x^2 (\cos^2\varphi \cotg^2\delta - \sin^2\varphi)]^{1/2}}{1 - \cos^2\varphi (1 + \cotg^2\delta)} \quad (16)$$

Si ottiene così per punti la prima metà dell'iperbole, relativa ai valori positivi di  $x$ : per simmetria rispetto all'asse delle  $y$  è poi immediato tracciarne l'altra metà. Si noti che nella espressione ora scritta si prenderà il segno + davanti al radicale in corrispondenza dei valori negativi della declinazione, il segno — in corrispondenza dei valori positivi. Infine per il quadrante verticale occorrerà come al solito scambiare la funzione goniometrica  $\sin\varphi$  con  $\cos\varphi$  e viceversa, ottenendo l'espressione:

$$y = \frac{\ell \sin\varphi \cotg^2\delta \pm [\ell^2 \cotg^2\delta \cos^2\varphi + x^2 (\sin^2\varphi \cotg^2\delta - \cos^2\varphi)]^{1/2}}{1 - \sin^2\varphi (1 + \cotg^2\delta)} \quad (16')$$

nella quale si prenderà il segno — davanti al radicale in corrispondenza dei valori negativi della declinazione, il segno + in corrispondenza dei valori positivi.

## Bibliografia

- GARNIER E., 1939. Gnomonica. Teoria e pratica dell'orologio solare, U. Hoepli, Milano.  
 KOVALEVSKY J., 1974. Calcul du cadran solaire de Juvisy, *L'astronomie*, 88, 382.  
 MAYALL R. NEWTON, MAYALL MARGARET W., 1973. Sundials, Sky Publishing Corporation, Cambridge, Mass.  
 ROHR RENE R.J., 1965. Les cadrans solaires, Gauthier-Villars, Parigi.  
 ROHR RENE R.J., 1970. Sundials. History, theory and practice, University of Toronto Press, Toronto (traduzione dell'opera precedente).  
 SAGOT R., 1974. Le nouveau cadran solaire de l'Observatoire de Juvisy, *L'Astronomie*, 88, 367.  
 SCHUTTE K., 1975. Modern sundials in astronomy. A handbook, ed. by G.D. Roth, A. Beer, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, p. 191.  
 WAUGH ALBERT E., 1973. Sundials. Their theory and construction, Dover, New York.

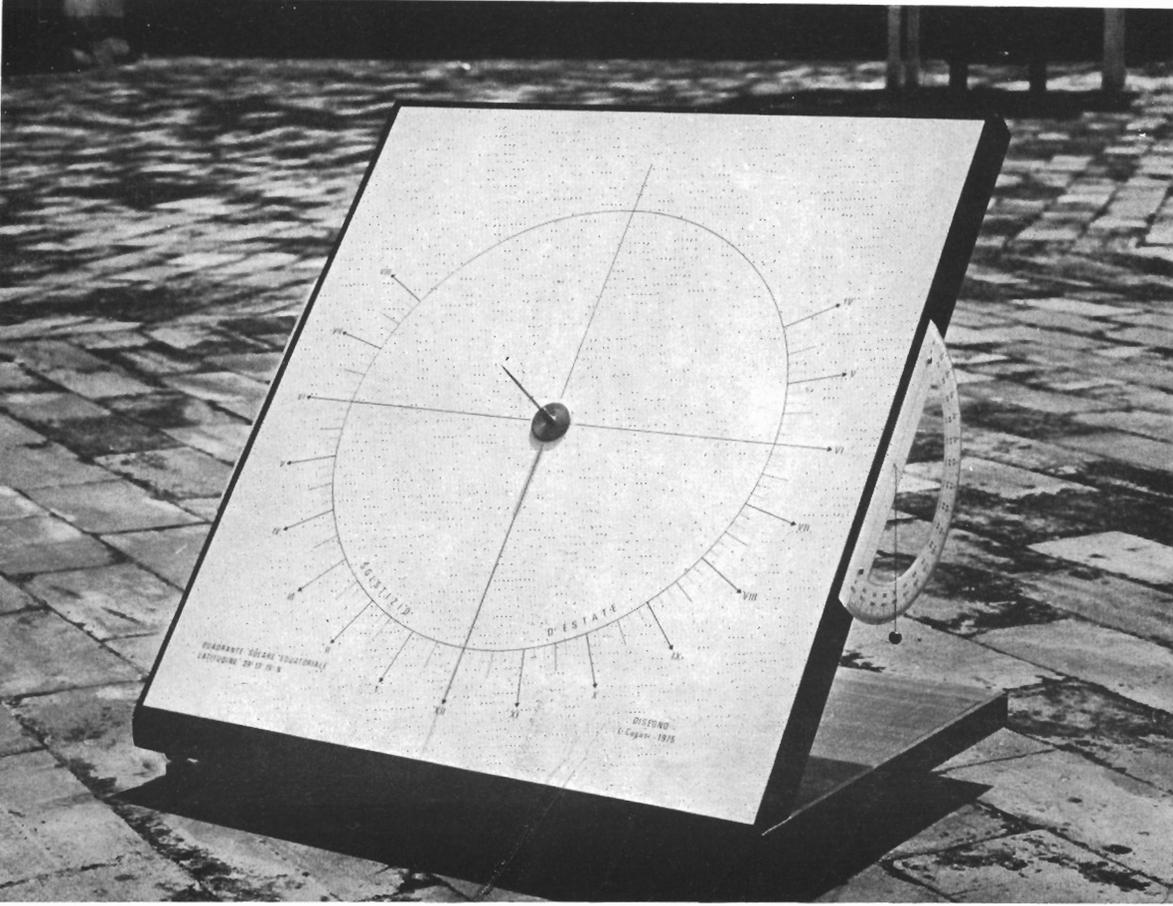


TAVOLA I  
Quadrante solare equatoriale.

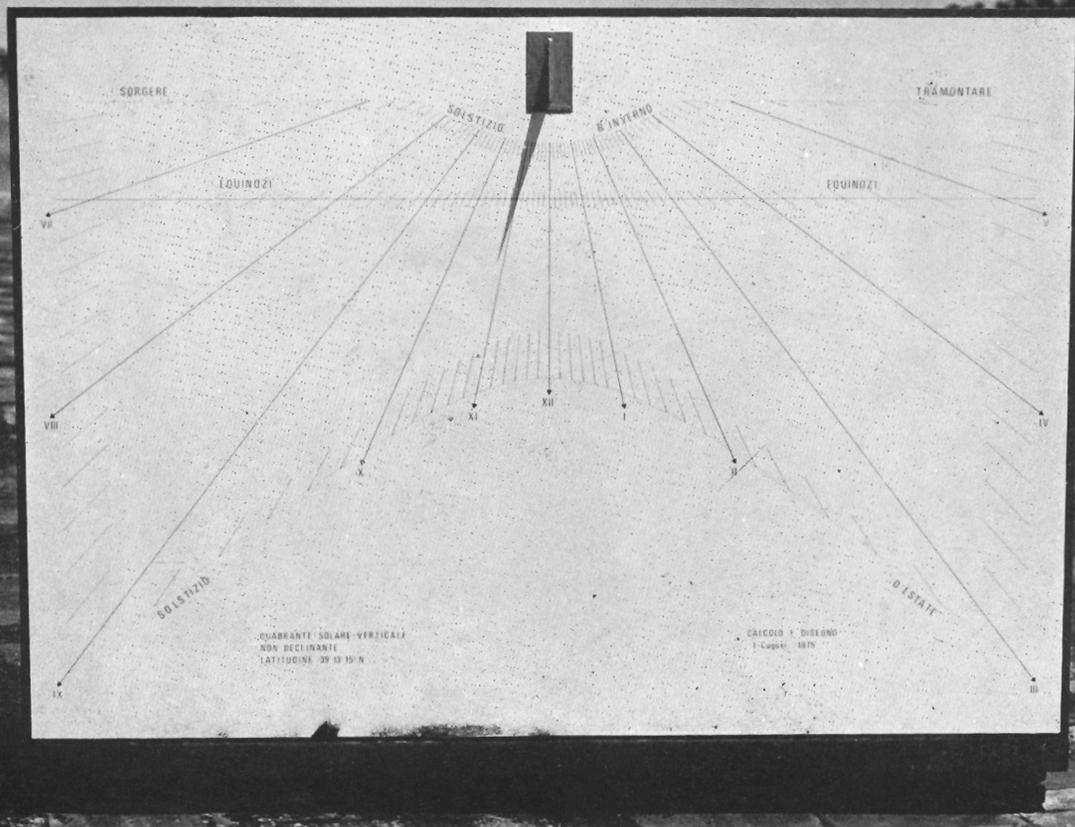


TAVOLA II  
 Quadrante solare verticale non declinante.



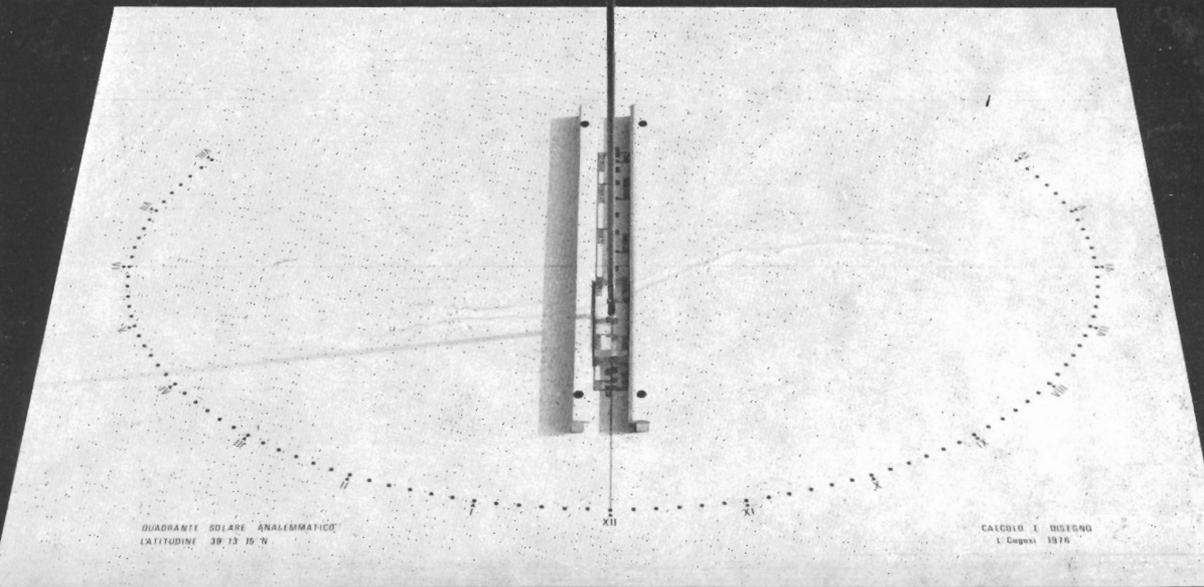


TAVOLA IV  
Quadrante solare orizzontale analemmatico.